

7 Lõplike elementide meetod rajaülesannete lahendamiseks

Sisukord

7 Lõplike elementide meetod rajaülesannete lahendamiseks	87
7.1 Sissejuhatus	88
7.2 Kollokatsioonimeetod	88
7.3 Integreeruva ruuduga funktsioonide ruum $L^2(a, b)$	90
7.4 Galjorkini meetodi idee	91
7.5 Lõplike elementide meetod	92

7.1 Sissejuhatus

Vaatleme konkreetset teist järku diferentsiaalvõrrandit

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad x \in [a, b], \quad (7.1)$$

rajatingimustega

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (7.2)$$

Diferentsmeetodi idee oli rajaülesande taandamine teatud arvukuks algebraisteks võrranditeks, mille järel lahendati saadud lineaarne või mittelineaarne süsteem. Tulemuseks saadi lähislahendi väärtused sõlmedes y_0, y_1, \dots, y_N . Järgnevalt vaatleme kollokatsioonimeetodit ja lõplike elementide meetodit, mille eesmärgiks on leida lähislahend funktsiooni kujul $y_n(x)$. Viimase leidmiseks moodutatakse samuti algebraistete võrrandite süsteem.

Valime mingid heade omadustega lineaarselt sõltumatud baasfunktsioonid $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$, näiteks polünoomid, splainid, lainekeused. Sel juhul otsime oma algsele ülesandele lähislahendit nende baasfunktsioonide lineaarse kombinatsioonina

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) \quad (7.3)$$

kus peale kordajate c_1, \dots, c_n määramist ongi lähislahend leitud. Küsimus on muidugi selles, et kuidas neid kordajaid leida.

7.2 Kollokatsioonimeetod

Kollokatsioonimeetodi idee on väga lihtne.

1. Esiteks moodustame nn. kollokatsioonisõlmed

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b. \quad (7.4)$$

2. Asetame lähislahendi $y_n(x)$ algseesse võrrandisse (7.1)-(7.2):

$$y_n''(x) = f(x, y_n(x), y_n'(x)), \quad y_n(a) = y_a, \quad y_n(b) = y_b. \quad (7.5)$$

3. Nõuame, et võrrandid (7.5) oleksid rahuldatud **kõikides** sisesõlmedes x_2, \dots, x_{n-1} ja lisaks rajapunktides:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n''(x_i) = f(x_i, y_n(x_i), y_n'(x_i)), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ y_n(a) = y_a \\ y_n(b) = y_b \end{array} \right\} \quad (7.6)$$

4. Lahendame n võrrandist koosneva võrrandite süsteemi n tundmatu c_1, \dots, c_n leidmiseks.

Märkus 7.1

Oma olemuselt on kollokatsioonimeetod interpoleerimisülesanne, lähislahend $y_n(x)$ peab võrduma lahendiga kõikides sõlmedes, s.t.

$$y_n(x_i) = y(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Kollokatsioonimeetod on küll lihtsa ideega, aga samas veidi „tujukas“. Lähislahendi täpsus sõltub suurel määral kollokatsioonisõlmede paiknemisest.

Näide 7.1 Vaatleme rajaülesannet

$$y'' = 4y, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3.$$

Valime $n = 3$ ja lihtsuse mõttes olgu baasfunktsioonideks lihtsad astmefunktsioonid $1, x$ ja x^2 . Sel juhul otsime lähislahendit kujul

$$y_3(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2.$$

Asetame lähislahendi y_3 algsesse ülesandesse:

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2x + c_3x^2)'' &= 4c_1 + 4c_2x + 4c_3x^2, \\ c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0^2 &= 1, \\ c_1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1^2 &= 3. \end{aligned}$$

Lihtsustame,

$$\begin{aligned} 2c_3 &= 4c_1 + 4c_2x + 4c_3x^2, \\ c_1 &= 1, \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 3. \end{aligned}$$

Valime lõigul $[0, 1]$ ühtlaselt paiknevad sõlmed $x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1$. Moodustame kollokatsioonisüsteemi (7.6). Meil on ainult üks sisevõrrand: $x_2 = \frac{1}{2}$ jaoks,

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \\ 4c_1 + 2c_2 - c_3 &= 0, \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 3. \end{aligned}$$

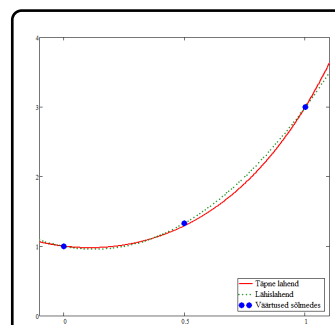
Viimase süsteemi saab kirja panna maatrikskujul,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Toodud süsteemi lahendiks on $c_1 = 1, c_2 = -\frac{2}{3}$ ja $c_3 = \frac{8}{3}$. Seega lähislahendiks saame

$$y_3(x) = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}x^2.$$

◇ ◇ ◇



Tulemuse täpsustamiseks tuleks võtta rohkem baasfunktsioone. Märgime, et puhtalt polünoomidega lähendamine ei pruugi olla hea mõte (sarnased probleemid, mis kõrget järku polünoomidega interpoleerimisel esinevad). Selle asemel on praktikas levinud pigem splineide, trigonomeetriliste funktsioonide ja lainekeste kasutamine.

7.3 Integreeruva ruuduga funktsioonide ruum $L^2(a, b)$

Definitsioon 7.1

Vahemikus (a, b) integreeruva ruuduga (reaalsed) funktsioonid moodustavad vektorruumi

$$L^2(a, b) = \left\{ y(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \exists \int_a^b y^2(s) ds < \infty \right\}. \quad (7.7)$$

Kirjutis $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tähendab siin, et funktsioon on vahemikus (a, b) määratud peaaegu kõikjal, täpsemat formuleering ei ole meie jaoks oluline.

Näide 7.2 Näiteks kuuluvad siia kõik lõigul $[a, b]$ pidevad ja tükiti pidevad funktsioonid, aga ka teatud tüüpi lõpmatu arv katkevuskohiti omavad ja teatud singulaarsed funktsioonid. Näiteks $y(x) = x^{-1/2}$ on vahemikus $(0, 1)$ integreeruv, kuid ei ole integreeruva ruuduga, kuna $\int_0^1 \frac{1}{s} ds = -\lim_{s \rightarrow 0^+} \ln |s| \rightarrow \infty$. Samas, funktsioonid $y(x) = x^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$ on integreeruva ruuduga. Ruum $L^2(a, b)$ on laialt kasutusel teoreetilistes uurimustes näiteks Fourier' ridade analüüsis, kvantmehaanikas jne.

◇ ◇ ◇

Märkus 7.2

Ruum $L^2(a, b)$ on Hilberti ruum skalaarkorrutisega

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(s)y_2(s) ds \quad (7.8)$$

Definitsioon 7.2

Funktsioone $y_1, y_2 \in L^2(a, b)$ nimetatakse ortogonaalseteks, kui

$$\langle y_1, y_2 \rangle = 0.$$

Näide 7.3 Näiteks on kõik lõigul $[-1, 1]$ määratud paarisfunktsioonid ortogonaalsed paaritute funktsioonidega, kuna integraal paaritute funktsioonidest üle sümmeetrilise raja on null. Näiteks $f(x) = x^3$ ja $g(x) = \cos(x)$ korral

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \cos(x) dx = 0.$$

Samas ei ole siin ortogonaalsed x^3 ja $\sin(x)$.

◇ ◇ ◇

7.4 Galjorkini meetodi idee

Lõplike elementide meetod baseerub üldisel Galjorkini meetodil, millel on kaks põhiideed.

1. Tähistame võrrandi (7.1) jaoks hälbe

$$R_n(x) = y_n''(x) - f(x, y_n, y_n'). \quad (7.9)$$

Skalaarkorrutisega ruumis on vektor u nullvektor parajasti siis, kui ta on ortogonaalne kõigi selle ruumi elementidega. On selge, et sel juhul y_n on võrrandi (7.1) täpne lahend, kui

$$\langle y_n'' - f, v \rangle = 0, \quad \forall v \in L^2(a, b).$$

Meie kahjuks sellist lõpmatut tingimust lõplikus aritmeetikas kasutada ei saa.

Me nõuame, et hälbe $R_n(x)$ oleks ortogonaalne **kõigi** valitud baasfunktsioonidega $\phi_0(x), \dots, \phi_{n+1}(x)$, s.t. $\langle R_n, \phi_i \rangle = 0$ ehk

$$\int_a^b y_n''(s) \phi_i(s) ds = \int_a^b f(s, y_n, y_n') \phi_i(s) ds, \quad i = 0, \dots, n+1. \quad (7.10)$$

2. Paneme tähele, et ositi integreerimise võttega võime vabaneda integraali märgi all olevast teisest tuletisest,

$$\int_a^b y_n''(s) \phi_i(s) ds = \phi_i(s) y_n'(s) \Big|_a^b - \int_a^b y_n'(s) \phi_i'(s) ds. \quad (7.11)$$

Sellisel juhul saab võrrand (7.10) järgmise kuju:

$$\int_a^b f(s, y_n, y_n') \phi_i(s) ds = \phi_i(b) y_n'(b) - \phi_i(a) y_n'(a) - \int_a^b y_n'(s) \phi_i'(s) ds, \\ i = 0, \dots, n+1. \quad (7.12)$$

Asetades viimasesse võrrandite süsteemi lähislahendi avaldise

$$y_n(x) = c_0 \phi_0(x) + \dots + c_{n+1} \phi_{n+1}(x),$$

saame $n+2$ tundmatu c_0, \dots, c_{n+1} jaoks $n+2$ võrrandit.

Märkus 7.3

Galjorkini meetodi koonduvus ja koonduvuskiirus sõltub suurel määral baasfunktsioonide valikust. On funktsioone, mille korral saavutatakse teoreetiliselt hea koonduvuskiirus, kuid mille korral tulemus osutub arvutuslikult ebastabiilseks (s.t. väikesed arvutusvead muudavad lahendit väga oluliselt).

7.5 Lõplike elementide meetod

Galjorkini meetod annab meile idee kasutada baasfunktsioonide rollis min-geid hästi lihtsaid funktsioone nagu näiteks baassplainid, mida nimetatakse ka nn. lõplikeks elementideks. Baassplainid on nullist erinevad ainult väikesel osalõigul.

Näiteks, valime baasfunktsioonide $\phi_0(x), \dots, \phi_{n+1}(x)$ rolli pidevad lineaarsed baassplainid. Viimaste moodustamiseks vajame sõlmi

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b. \quad (7.13)$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \notin [x_0, x_1] \end{cases}, \quad \phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_n}{x_{n+1}-x_n}, & x \in [x_n, x_{n+1}] \\ 0, & x \notin [x_n, x_{n+1}] \end{cases},$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n.$$

(7.14)

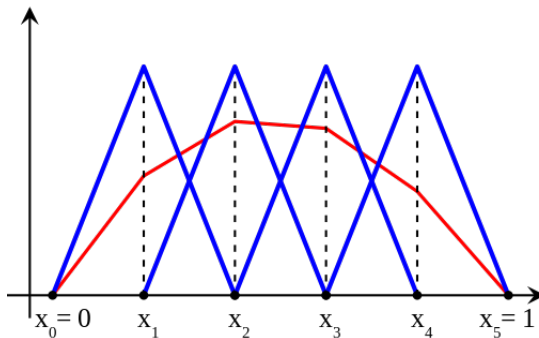
Funktsioonid $\phi_0(x), \dots, \phi_{n+1}(x)$ on nullist erinevad ainult nende vastavates osalõikudes. Samuti kehtib omadus

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Andes ette tasandipunktid (x_i, c_i) , $i = 0, \dots, n+1$, saame tükiti lineaarse splaini

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \phi_i(x), \quad x \in [a, b]. \quad (7.15)$$

Joonisel on sinisega toodud baassplainid $\phi_1(x), \dots, \phi_4(x)$ ja punasega nende lineaarne kombinatsioon $S_4(x)$ (tükiti lineaarse splain).



On selge, et

$$S_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \phi_i(x_j) = c_j, \quad j = 0, \dots, n+1.$$

Tükiti lineaarne spline $S_n(x)$ interpoleerib tasandi punkte (x_i, c_i) . Seega ei ole kordajad c_i mitte ainult lineaarse kombinatsiooni kordajada, vaid ka lähilahendi y_n väärtused sõlmedes x_i . Järgnevalt tuletame lihtsamad valemid lõplike elementide meetodi jaoks.

Esiteks, rajatingimuste korral

$$y_n(a) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \phi_i(a) = c_0, \quad (7.16)$$

$$y_n(b) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \phi_i(b) = c_{n+1}. \quad (7.17)$$

Teiseks, moodustame n sisevõrrandit

$$\int_a^b f(s, y_n, y_n') \phi_i(s) ds = \phi_i(b) y_n'(b) - \phi_i(a) y_n'(a) - \int_a^b y_n'(s) \phi_i'(s) ds, \quad (7.18)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Arvestades, et $i = 1, \dots, n$ korral $\phi_i(a) = 0$ ja $\phi_i(b) = 0$, siis saame võrrandite süsteemi

$$\begin{aligned} c_0 &= y(a), \\ \int_a^b \phi_i(s) f(s, y_n, y_n') ds + \sum_{j=0}^{n+1} \left(\int_a^b \phi_i'(s) \phi_j'(s) ds \right) c_j &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ c_{n+1} &= y(b). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Viimast annab kirja panna ka skalaarkorrutise abil,

$$\begin{aligned} c_0 &= y(a), \\ \left\langle \phi_i, f \left(x, \sum_{j=0}^{n+1} c_j \phi_j, \sum_{j=0}^{n+1} c_j \phi_j' \right) \right\rangle + \sum_{j=0}^{n+1} \langle \phi_i', \phi_j' \rangle c_j &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ c_{n+1} &= y(b). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Toome lisaks mõned tüüpilised lineaarsete baassplainide lihtsustamise valemid $i = 1, \dots, n$ ja ühtlase võrgu jaoks (sammuga h):

$$\int_a^b \phi_i(s) \phi_{i+1}(s) ds = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - s}{h} \right) \left(\frac{s - x_i}{h} \right) ds = \frac{1}{h^2} \int_0^h (h - z) z dz = \frac{h}{6}, \quad (7.21)$$

$$\int_a^b \phi_i^2(s) ds = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i^2(s) ds = \frac{2}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{2}{3}h, \quad (7.22)$$

$$\int_a^b \phi_i'(s)\phi_{i+1}'(s) ds = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) ds = -\frac{1}{h}, \quad (7.23)$$

$$\int_a^b (\phi_i'(s))^2 ds = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\phi_i'(s))^2 ds = \frac{2}{h^2} \int_0^h dz = \frac{2}{h}. \quad (7.24)$$

Näide 7.4 Vaatleme eelnevalt lahendatud rajaülesannet

$$y'' = 4y, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3.$$

Valime $n = 3$ ja lõigul $[0, 1]$ ühtlaselt paiknevad sõlmed $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$. Sel juhul otsime lähislahendit kujul

$$y_3(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x) + c_4\phi_4(x).$$

Asetame lähislahendi y_3 võrrandite süsteemi (7.19):

$$\begin{aligned} c_0 &= y(0) = 1, \\ \sum_{j=0}^4 \left[4 \int_0^1 \phi_i(s)\phi_j(s) ds + \int_0^1 \phi_i'(s)\phi_j'(s) ds \right] c_j &= 0, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (7.25) \\ c_4 &= y(1) = 3. \end{aligned}$$

Lihtsustame,

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = 1 \\ \left[\frac{2}{3}h - \frac{1}{h} \right] c_0 + \left[\frac{8}{3}h + \frac{2}{h} \right] c_1 + \left[\frac{2}{3}h - \frac{1}{h} \right] c_2 = 0 \\ \left[\frac{2}{3}h - \frac{1}{h} \right] c_1 + \left[\frac{8}{3}h + \frac{2}{h} \right] c_2 + \left[\frac{2}{3}h - \frac{1}{h} \right] c_3 = 0 \\ \left[\frac{2}{3}h - \frac{1}{h} \right] c_2 + \left[\frac{8}{3}h + \frac{2}{h} \right] c_3 + \left[\frac{2}{3}h - \frac{1}{h} \right] c_4 = 0 \\ c_4 = 3 \end{array} \right\}. \quad (7.26)$$

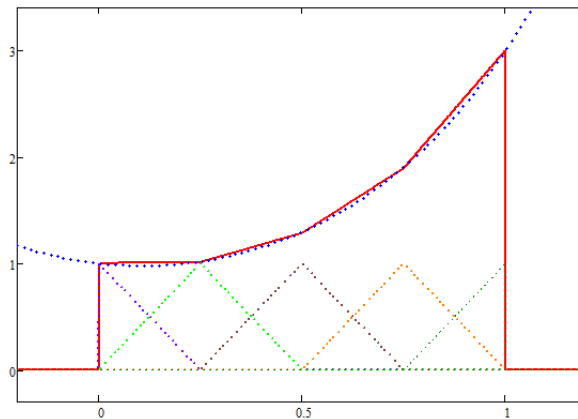
Viimase saab kirja panna maatrikskujul (arvestades, et $h = 1/4$),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{23}{6} & \frac{26}{3} & -\frac{23}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{23}{6} & \frac{26}{3} & -\frac{23}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{6} & \frac{26}{3} & -\frac{23}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Esitame süsteemi lahendid tabelis, kuhu lisame ka täpse lahendi väärtused sõlmedes ($c_i = y_3(x_i)$, $i = 0, \dots, 4$):

sõlmed	lähislahend	täpne lahend
$x_0 = 0.00$	1.0000	1.0000
$x_1 = 0.25$	1.0109	1.0181
$x_2 = 0.50$	1.2855	1.2961
$x_3 = 0.75$	1.8955	1.9049
$x_4 = 1.00$	3.0000	3.0000

Joonisel on kujutatud erinevad baassplainid, punasega tekkinud tükiti lineaarne splain ja sinisega täpne lahend.



Tulemuse täpsustamiseks tuleks võtta rohkem baasfunktsioone. Märkige, et antud juhul on see väga lihtne, kuna süsteemi $Ac = F$ maatriks A jääb sarnaseks kolmediagonaalseks maatriksiks.

◇ ◇ ◇

Viited

- [1] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [2] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.
- [3] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.