

1 Newton'i jahtumisseadus

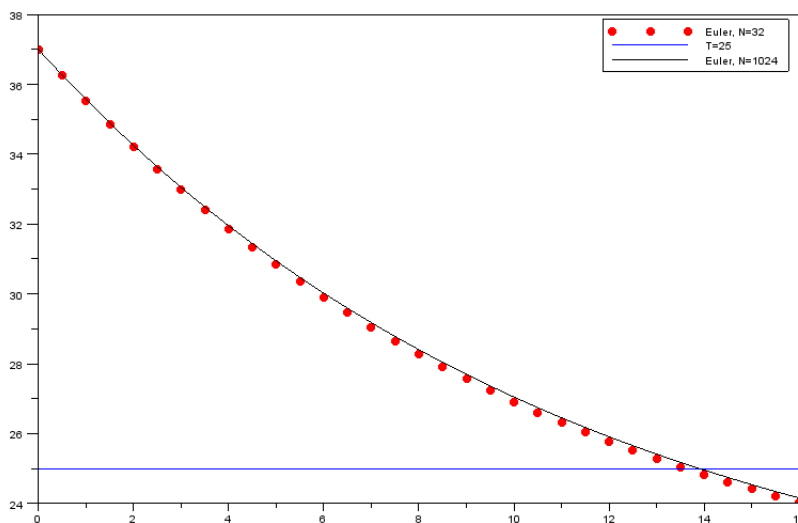
Esimene seadus kehade jahtumise kohta konvektsiooni teel avaldati Isaac Newton'i poolt 28. mail 1701, mis lihtsustatult kõlas

„keha soojushulga muutumise kiirus keha pinnaühiku kohta on võrdeline keha pinna ja ümbritseva keskkonna temperatuuride vahega.“

Newton'i sõnastatud seadusest saab tuletada algtingimusega ülesande

$$\begin{cases} T'(t) = -\beta \cdot (T(t) - T_*) \\ T(0) = T_0 \end{cases}, \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

- otsitav $T(t)$ on keha temperatuur ajahetkel t , $T(0)$ on algtemperatuur.
- T_* on ajas muutumatu väliskeskkonna temperatuur.
- $\beta > 0$ on süsteemi iseloomustav konstant (ühikuks on $1/s$).



Märkus 1.1

Märgime, et kui välistemperatuur $T_* < T_0$, siis $T(t) - T_* > 0$ ja temperatuuri muutumise kiirus $T'(t)$ on negatiivne ning keha jahtub. Kui välistemperatuur $T_* > T_0$, siis $T(t) - T_* < 0$ ja temperatuuri muutumise kiirus $T'(t)$ on positiivne ning keha soojeneb.

Märkus 1.2

Newton'i jahtumisseaduse ja täiustatud mittelineaarse Newton'i-Stefan'i mudeli kohta võib soovi korral lugeda materjalidest [1]-[6].

1.1 Algtingimusega ülesande lahendamine Euler'i meetodiga

Lahendame algtingimusega ülesannet

$$y' = f(t, y), \quad y(a) = T_0.$$

1. Esiteks on kasulik defineerida kahe muutuja funktsioon f .

```
function yy = f(t, y)
    yy =          // siia tuleb vastav avaldis t ja y kaudu.
endfunction
```

2. Valime osalõigu $[a, b]$, milles ülesannet lahendame.
3. Valime osalõikude arvu $N \in \mathbb{N}$, moodustame ühtlaselt paiknevad sõlmed

paberil	arvutis
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$	$\mathbf{t} = \mathbf{linspace}(\mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{N}+1)$

4. Otsime lähislahendit y_0, \dots, y_N vastavalt sõlmedes t_0, \dots, t_N . Selleks loome arvutis nullidega täidetud vektori

paberil	arvutis
$y_0 = y_1 = \dots = y_N = 0$ $y_0 = T_0$	$\mathbf{y} = \mathbf{zeros}(\mathbf{t})$ $y(1)=T_0$

5. Leiame ülejäänud lähislahendid y_1, \dots, y_N Euler'i meetodiga

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i), \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

NB! SciLab-is arvestage, et indeks i on ühe võrra nihutatud, s.t. $i = 1, \dots, N$.

6. Graafiku joonestamiseks võime kasutada käsku

```
plot( t , y , "r." ) // vektor vastu vektorit , värv on punane
                // ja graafiku tüübiks on punktid
```

Ülesanne 1.1

Spetsialist-kriminalist Säde leiab Tornis pagariäri omaniku mõrvatuna laoruumist kell 16 : 00. Uurimise käigus tekib hüpotees, et omanik mõrvati u. kell 05 : 35 varahommikul. Antud kellaajast järeldeb süüdistaja, et peamine kahtlusallane on postiljon Petškin, kes tõi pagariärisse hommikused lehed alati kell 05 : 30 ja keda eelmisel päikeselisel hommikul pikasabaline koheva karvaga pagari koer olla pahemast kannast näksanud.

Kohtuvaidlusesse kaasatakse ka teid kui spetsialisti ja palutakse versiooni kontrollida matemaatiliselt. Te saate teada, et laoruumi temperatuuri hoitakse stabiilselt 19 kraadi juures, u. kell 16 : 00 mõõdeti (piisavalt täpselt) ohvri temperatuuriks 26 kraadi, kusjuures pagar olla eelmisel päeval rõõmus ja tervise juures (seega $T_0 \approx 37$ kraadi).

Kommentaariid

1. Parameeter $\beta = 0.089$ (1/tund), selle kohta võib hiljem lugeda abimaterjalidest.
2. Leidke ülesande (1.1) lähislahend Euler'i meetodiga osalõikude arvu $N = 16$ ja $N = 512$ korral. Võib leida kas siis protseduuri või lihtsa for-tsükli abil.
3. Mõrvaaja määrame selle järgi, millises punktis t temperatuur $T(t)$ on kõige lähemal 26 kraadile (vastus ise peaks olema antud paariminutilise täpsusega). Kõige lihtsam on kasutada graafiku abi.
4. Kui suur on ajavahe lahendite $N = 16$ ja $N = 512$ korral?
5. Viige vajalikud andmed ühele graafikule. Püüdke saada sarnane töölehel olevaga või kui oskate, siis veel paremini vormistatud graafik.
6. Umbkaudu, alatest millisest N väärtusest võiksite oma vastust usaldada (s.t. lähislahend on täpsele lahendile piisavalt lähedal ja vastus ei muutu enam oluliselt)?

Viited

- [1] Y. A. Cengel. Introduction to Thermodynamics and Heat Transfer. USA, McGraw-Hill, 2008.
- [2] C. Henssge, B. Madea. Estimation of the time since death in the early post-mortem period. Forensic Science International 144, 167-175, 2004.
- [3] G. S. W. de Saram, G. Webster, N. Kathirgamatamby. Post-mortem temperature and the time of death. 46 J. Crim. L. Criminology & Police Sci. 562, 1955-1956.
- [4] J. Sedlacek, Jiri Dolejsi. A physical description of coffee cooling in a pot.
- [5] C. T. O'Sullivan. Newton's law of cooling - A critical assessment. Am. J. Phys. 58 (10), 1990.
- [6] M. Vollmer. Newton's law of cooling revisited. Eur. J. Phys. 30: 1063-1084, 2009.