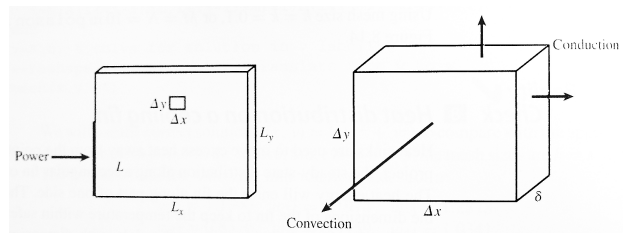
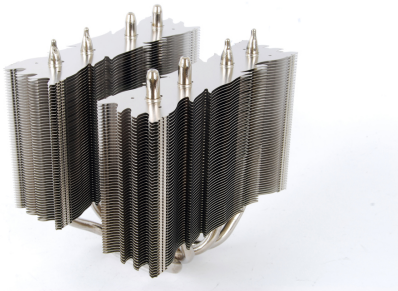


## 13 Soojuse levimine jahutusplaadis

Olgu meil õhuke plaat mõõtmetega  $L_x \times L_y$  cm läbimõõduga  $\delta$  cm. Plaat on tehtud metallist ja näiteks täidetud õhuga. Sellist lihtsat plaati annab kasutada elektroonikaseadmetes (arvutites, telerites jne) jahutusseadmetena. Keerulisemal juhul kasutatakse võretüüpi seadmeid, mis on omavahel teatavas ühenduses. Jahutusplaadi mõte on juhtida üleliigset soojust kuumenenud seadmest eemale.



### 13.1 Poisson'i võrrand

Vaatleme soojuste levimise võrrandit jahutusplaadis (vt. [1])

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = \frac{2 \cdot H}{K \cdot \delta} \cdot u(x, y) \quad (13.1)$$

- Olgu meil ruumi temperatuur  $T$  kraadi Celsius'e järgi. Siis lahend  $u(x, y) + T$  näitab jahutusplaadi temperatuuri punktis  $(x, y)$ .
- $K$  on metalli soojusjuhtivus ( $W/cm^{\circ}C$ ).
- $H$  on täitematerjali soojusülekangetegur ( $W/cm^2{}^{\circ}C$ ).
- $x$  ja  $y$  ühikuks on siin cm.
- Meil on lisaks Robin'i rajatingimused (konvektsiooni teel leviva soojuste jaoks)

$$u_{\vec{n}}(x, y) - \frac{H}{K} \cdot u(x, y) = 0, \quad (13.2)$$

kus indeks  $\vec{n}$  tähistab normaalvektori suunalist osatuletist, mis on suunatud plaadist välja

poole. Plaadi alumisel, ülemisel, vasakul ja paremal serval on see defineeritud vastavalt:

$$u_{\bar{n}}(x, y) = -u_y(x, y) \text{ plaadi all servas,} \quad (13.3)$$

$$u_{\bar{n}}(x, y) = u_y(x, y) \text{ plaadi ülal servas,} \quad (13.4)$$

$$u_{\bar{n}}(x, y) = -u_x(x, y) \text{ plaadi vasakus servas,} \quad (13.5)$$

$$u_{\bar{n}}(x, y) = u_x(x, y) \text{ plaadi paremas servas.} \quad (13.6)$$

- Lisaks eeldame, et plaat saab soojust juurde ainult vasaku serva kaudu, läbi küttekeha pikkusega  $L$  cm ja koguvõimsusega  $P$  vatti. Sel juhul vahetub välja üks Robin'i rajatingimus Fourier' seadusest tuleneva tingimuse vastu

$$u_{\bar{n}}(x, y) = \frac{P}{L \cdot \delta \cdot K}. \quad (13.7)$$

## Viited

- [1] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.

### 13.2 2-mõõtmelise Poisson'i võrrandi lahendamine võrgumeetodiga

1. Valime lõigul  $[a, b]$  osalõikude arvu  $N_x$ , sammude pikkuse  $h_x = \frac{b-a}{N_x-1}$  ja moodustame sõlmed

$$x_i = a + (i - 1) \cdot h_x, \quad i = 1, \dots, N_x.$$

2. Valime ajalõigul  $[c, d]$  osalõikude arvu  $N_y$ , sammude pikkuse  $h_y = \frac{d-c}{N_y-1}$  ja moodustame sõlmed

$$y_j = c + (j - 1) \cdot h_y, \quad j = 1, \dots, N_y.$$

3. Otsime võrrandi

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = \frac{2 \cdot H}{K \cdot \delta} \cdot u(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y \in [c, d],$$

lahendi  $u(x, y)$  lähisväärtusi  $u_{ij}$  sõlmedes  $x_1, \dots, x_{N_x}$  ja  $y_1, \dots, y_{N_y}$ .

4. Võttes

$$\beta(i, j) = i + (j - 1) \cdot N_x$$

ja tehes muutujavahetuse

$$v_{\beta(i,j)} = u_{i,j}, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y, \quad (13.8)$$

saame järgmise seose:

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,N_y} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,N_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N_x,1} & u_{N_x,2} & \cdots & u_{N_x,N_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\beta(1,1)} & v_{\beta(1,2)} & \cdots & v_{\beta(1,N_y)} \\ v_{\beta(2,1)} & v_{\beta(2,2)} & \cdots & v_{\beta(2,N_y)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{\beta(N_x,1)} & v_{\beta(N_x,2)} & \cdots & v_{\beta(N_x,N_y)} \end{pmatrix}.$$

5. Pannes maatriksi  $u$  veerud üksteise alla ühte vektorisse, saame lineaarvõrrandite süsteemi  $Av = F$  otsitava vektori  $v$  struktuuriks

$$v = (v_{\beta(1,1)}, \dots, v_{\beta(N_x,1)}, v_{\beta(1,2)}, \dots, v_{\beta(N_x,2)}, \dots, v_{\beta(1,N_y)}, \dots, v_{\beta(N_x,N_y)})^T.$$

Seda struktuuri läheb meil vaja hiljem, kui teisendame vektori  $v$  ümber maatriksiks  $u$ .

6. Kasutades võrgumeetodit, saame võrgu  $x_1, \dots, x_{N_x}$  ja  $y_1, \dots, y_{N_y}$  sisepunktides välja kirjutada  $(N_x - 2) \cdot (N_y - 2)$  võrrandit

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_y^2} - \frac{2H}{K\delta}u_{ij} = 0, \quad 1 < i < N_x, \quad 1 < j < N_y. \quad (13.9)$$

7. Süsteemi  $Av = F$ ,  $i = 2, \dots, N_x - 1$  ja  $j = 2, \dots, N_y - 1$  jaoks kehtivad võrdused

$$A(\beta(i, j), \beta(i, j) + [-N_x, -1, 0, 1, N_x]) = \left[ \frac{1}{h_y^2}, \frac{1}{h_x^2}, -\left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} + \frac{2H}{K\delta}\right), \frac{1}{h_x^2}, \frac{1}{h_y^2} \right]$$

8. Rajatingimuste jaoks kasutame vastavalt vajadusele pluss- ja miinussammuga  $\pm h$  valemit

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x \pm h) - f(x \pm 2h)}{\pm 2h} + O(h^2).$$

Ülesandest lähtuvalt võtavad rajatingimused järgmise kuju

$$\begin{aligned} A(\beta(i, 1), \beta(i, [1, 2, 3])) &= (-3 + 2h_y \frac{H}{K}, 4, -1) \quad , i = 1, \dots, N_x \\ A(\beta(i, N_y), \beta(i, N_y - [2, 1, 0])) &= (-1, 4, -3 + 2h_y \frac{H}{K}) \quad , i = 1, \dots, N_x \\ A(\beta(1, j), \beta(1, j) + [0, 1, 2]) &= (-3, 4, -1) \quad , j = 2, \dots, \frac{N_y}{2} \\ A(\beta(1, j), \beta(1, j) + [0, 1, 2]) &= (-3 + 2h_x \frac{H}{K}, 4, -1) \quad , j = \frac{N_y+2}{2}, \dots, N_y - 1 \\ A(\beta(N_x, j), \beta(N_x, j) - [2, 1, 0]) &= (-1, 4, -3 + 2h_x \frac{H}{K}) \quad , j = 2, \dots, N_y - 1 \end{aligned}$$

(13.10)

9. Vabaliikmes  $F$  on nullist erinevad ainult liikmed, kus vastavalt

$$F_{\beta(1,j)} = -2 \cdot h_x \cdot \frac{P}{L \cdot \delta \cdot K}, \quad j = 2, \dots, \frac{N_y}{2}.$$

10. Toome siinkohal mõned ideed SciLab'i kasutamiseks.

```
A = zeros( Nx*Ny , Nx*Ny ) // See tuleb veel õigesti täita
F = zeros( Nx*Ny , 1 )
beeta = indeks( i , j ) // indeks on funktsioon
A = sparse( A )
v = umfpack( A , '\ ' , F )
u( : , j ) = v( indeks( 1 : Nx , j ) ) // tagasiteisendus
```

### 13.3 Praktikum ülesanne

1. Kasutame  $4 \times 4$  cm plaati paksusega  $\delta = 0.1$  cm ehk 1 mm. Materjaliks on alumiinium, mille korral  $K = 1.68$ . Täitematerjaliks on õhk,  $H = 0.005$ . Meil on toatemperatuur  $T = 20$  kraadi.
2. Eeldame, et plaat saab soojust juurde ainult vasaku serva kaudu (Fourier' seadus), kus küttelemdi pikkus on  $L = 2$  cm, ülejäänud lõigul (2,4] kütmist ei toimu (Robin'i raja-tingimused). Küttelemdi koguvõimsus on  $P = 5$  W.
3. Milline on jahutusplaadi maksimaalne temperatuur?
4. Kui me vahetame alumiiniumi vase vastu, siis  $K = 3.85$  W/cm°C. Leida suurim koguvõimsus  $P$ , mille korral jahutusplaadi temperatuur ei ületa  $80^\circ\text{C}$ .
5. Kõige lõpuks täidame plaadi mitte õhuga, vaid veega. Sel juhul  $H = 0.1$  W/cm<sup>2</sup>°C. Leida suurim koguvõimsus  $P$ , mille korral jahutusplaadi temperatuur ei ületa  $80^\circ\text{C}$ .
6. Küsitud vastustes piisab täpsusest üks komakoht.
7. 3D graafiku kohta võib kasutada järgmisi käske:

```
plot3d1( x , t , y , alpha = 17 , theta = -210 )
// theta ja alpha on nurgad kraadides graafiku pööramiseks
ff = gcf() \
ff.color_map = rainbowcolormap( 512 )
```