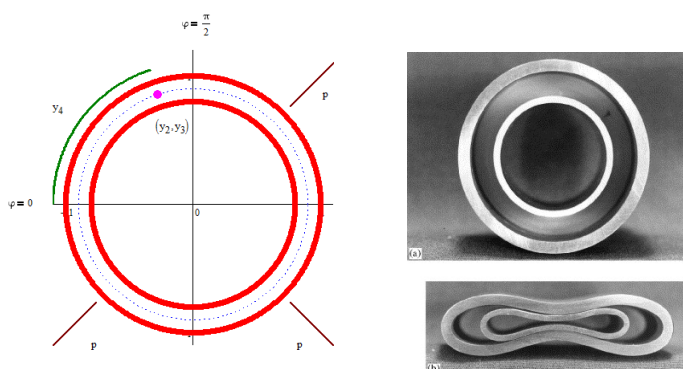


## 6 Torude deformeerumine

Maa sisse ja mere põhja installeeritavate torude paigutamisel on väga tähtis roll välisrõhu arvestamisel. Mida sügavamal paiknevad torud, seda suuremad on kahjud vigase planeerimise pärast. Põhjamerre paigutatud naftatorud paiknevad näiteks 70 meetri sügavusel, samas kui kontinentide vahelistes ühendustes asuvad gaasitorud viie kilomeetri sügavusel ja peavad vastu pidama vähemalt  $5 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}$  suurusele rõhule. Viimane on väga suur väljakutse torude ehituses kasutatavatele materjalidele ja konstruktsioonile ning sealjuures selliselt, et materjali kulu ja maksumus ei oleks üleliia suur. Torude deformeerumise arvutiga modelleerimine on vajalik nendel juhtudel, kus laborikatsed on liiga kallid või neid lihtsalt ei ole võimalik teha.



### 6.1 Modelleerimine võrrandite süsteemiga

Toru deformeerumise üks võimalikke mudeleid on rajaülesanne (vt. [1, 2])

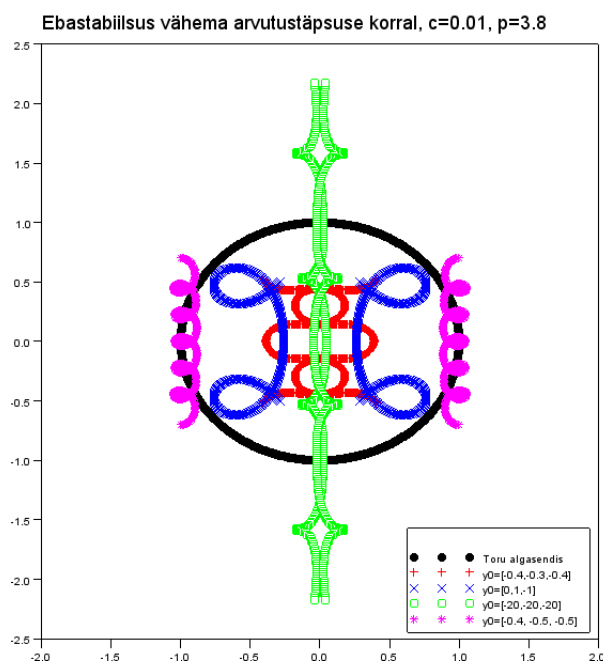
$$\begin{aligned}
 y_1'(s) &= -1 - c \cdot y_5(s) + (c + 1) \cdot y_7(s), & y_1(0) &= \frac{\pi}{2}, & y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\
 y_2'(s) &= \left(1 + c \cdot (y_5(s) - y_7(s))\right) \cdot \cos(y_1(s)), & & & y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\
 y_3'(s) &= \left(1 + c \cdot (y_5(s) - y_7(s))\right) \cdot \sin(y_1(s)), & y_3(0) &= 0, & & \\
 y_4'(s) &= 1 + c \cdot (y_5(s) - y_7(s)), & y_4(0) &= 0, & & \\
 y_5'(s) &= \left(1 + c \cdot y_5(s) - (c + 1) \cdot y_7(s)\right) \cdot y_6(s) & & & & \\
 y_6'(s) &= y_5(s) \cdot y_7(s) - \left(1 + c \cdot (y_5(s) - y_7(s))\right) \cdot (y_5(s) + p), & y_6(0) &= 0, & y_6\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\
 y_7'(s) &= \left(1 + c \cdot (y_5(s) - y_7(s))\right) \cdot y_6(s) & & & & 
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Mudel on loodud toru ristlõike jaoks (raadius on 1 meeter), koostatud II veerandis. Ülejäänud veerandites - I, III ja IV - saab lahendi  $y$  tuletada sümmeetria omaduste põhjal.

- $c$  on toru kokku surutavuse parameeter (kompresseeritavus). Mida suurem on  $c$ , seda suuremat välist hüdrosstaatilist survet  $p$  toru talub.
- $s$  on toru (ääre) algse keskjoone pikkus (juhul  $p = 0$ ),  $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

- $y_1(s)$  on keskjoone ja horisontaaljoone vaheline nurk (kui  $p = 0$ , siis  $y_1(s) = \frac{\pi}{2} - s$ ).
- $(y_2(s), y_3(s))$  on keskjoonel asuva punkti koordinaadid.
- $y_4(s)$  on deformeerunud toru keskjoone pikkus.
- $y_5(s)$  on toru sisemine telgjõud.
- $y_6(s)$  on toru sisemine normaaljõud.
- $y_7(s)$  on toru paindemoment.

Antud juhul on võrrandite süsteem juba nii tundlik, et erinevate arvutusvigade korral võime saada palju „libalahendeid“, nagu näiteks järgmisel joonisel:



## Viited

- [1] J. V. Huddleston. Extensibility and Compressibility in One-dimensional Structures, 2nd ed. ECS Publishing, Buffalo, NY 2000.
- [2] T. Sauer. Numerical Analysis. Pearson, 2012.

## 6.2 Tulistamismeetod võrrandite süsteemi jaoks

1. Meie eesmärk on leida üks algtingimustega ülesanne, mille lahend ühtiks võimalikult täpselt esialgse rajaülesande lahendiga.
2. Selleks tuleb leida puudu olevad algtingimused selles rajapunktis, kus me ülesannet lahendada hakkame, meie juhul punktis  $x = 0$ .
3. Selleks kasutame tulistamismeetodit, mis tähendab lihtsalt paljude algtingimustega ülesannete lahendamist. Siinjuures puuduolevate algtingimuste leidmiseks kasutame antud juhul Broyden'i II iteratsioonimeetodit. Viimane leiab nullkohti vektorfunktsioonile  $F = F(y)$ .
4. Loomes tulistamismeetodis vaadeldava funktsiooni  $F$  järgmiselt. Argumendiks (alglähendiks) on kolmerealine vektor

$$y_0 = [z_1, z_2, z_3] = [y_2(0), y_5(0), y_7(0)].$$

Moodustame funktsiooni  $F$  sees sõlmed lõigul  $[0, \frac{\pi}{2}]$  (NB! piisavalt tiheda) ja seejärel moodustame meie suure süsteemi (6.1) alglähendi:

$$\text{algtingimused} = [ \text{np.pi}/2, y_0(1), 0, 0, y_0(2), 0, y_0(3) ].$$

Funktsiooni  $F$  sees lahendame süsteemi (6.1), näiteks runge-kutta meetodiga või ode käsuga vms. Funktsiooni  $F$  enda väljundiks on teises rajapunktis olevate väärtuste vahe (-1 võtab lahendist viimase elemendi):

$$yy = \text{np.array}([ y[0, -1], y[1, -1], y[6, -1] ]) - \text{np.array}([ 0, 0, 0 ])$$

5. Broyden'i iteratsioonimeetodi jaoks anname ette alglähendi  $y_0$ , iteratsioonide arvu ja selle sama loodud funktsiooni  $F$ .
6. Saades Broyden'i meetodiga uue alglähendi  $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3]$ , lahendame selle abil viimast korda algtingimustega

$$\left[ \frac{\pi}{2}, \tilde{z}_1, 0, 0, \tilde{z}_2, 0, \tilde{z}_3 \right]$$

ülesande (6.1) (jällegi näiteks runge-kutta meetodiga).

### 6.3 Praktikumi ülesanne

1. Broyden'i meetodi jaoks kasutame näiteks 30 iteratsiooni (hiljem tasub katsetada erinevaid väärtusi).
2. Olgu  $c = 0.01$ . Leida lahend  $p = 0$  ja  $p = 3$  jaoks ning koostada toru ristlõike graafik täisringist. Graafiku saab koostada sümmeetria põhimõttel

$$[y_2, y_3], [y_2, -y_3], [-y_2, y_3], [-y_2, -y_3].$$

3. Kui palju muutub ringi raadius, kui  $p = 0$  muutub väärtuseks  $p = 3$ ?
4. Alates kriitilisest rõhust  $p_c$  ei ole võrrandite süsteemi lahend enam ühene. Olgu  $p = 3.8$ . Leidke kolm erinevat **stabiilset** lahendit, kasutades Broyden'i iteratsiooni alglahendina näiteks järgmisi algväärtusi:

$$[z_1, z_2, z_3]' = [-1, -3, 0]',$$

$$[z_1, z_2, z_3]' = [0, -1, 1]',$$

$$[z_1, z_2, z_3]' = [-1, -4, -1.5]'$$

Stabiilse lahendi tunnete vast joonise järgi ära tema üsna loogilise kuju tõttu.

5. Muutes ise vabalt algühendeid  $[z_1, z_2, z_3]'$  võite veenduda, et lahend käitub ebastabiilselt (enamasti arvutusvigade või ebapiisava iteratsiooni mõjul). Valides lisaks vähem iteratsioone ja väiksema relatiivse vea võib siin leida üpris kauneid kujundeid. Proovige leida midagi eriti „kunstipärast“.
6. Kui olete leidnud mõne hea algväärtuste komplekti  $[z_1, z_2, z_3]$  stabiilse lahendi jaoks, siis mis juhtub  $c = 0.001$  ja  $c = 0.05$  korral?