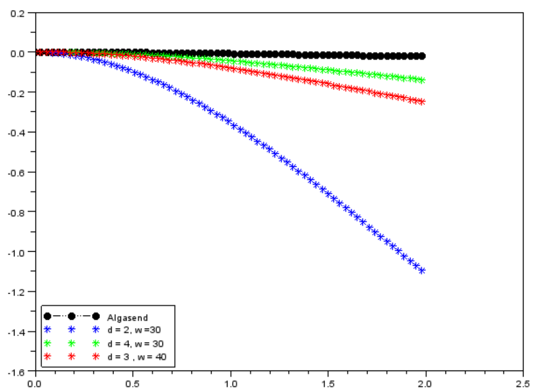
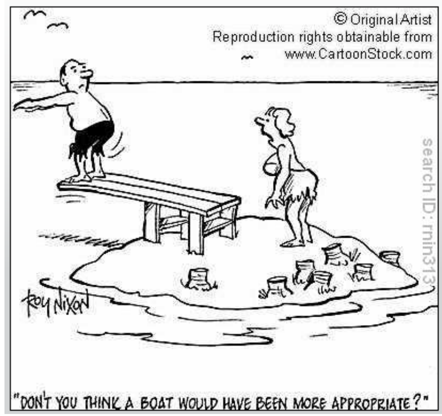
8 Tala paindumine

Rajaülesaded on olulisel kohal materjalide omaduste ja oleku uurmisel. Üks ehitusmehaanika valdkondi on uurida plaatide ja talade kinnitusviise ja nende talumisvõimet pragudele ja koormistele, sealhulgas erinevate materjalide jaoks. Kõike seda on odavam teha arvutis, kuna maksimaalsete pingeta ja jõudude leidmisel ei pea olemasolevaid materjale ära lõhkuma.





Hüppelaud on tore kuni te ei kasuta seda paadi asemel

8.1 Euler'i-Bernoull'i mudel

Horisontaalse tala painet (Euler'i-Bernoull'i mudel) kirjeldab lihtsamal juhul järgmine 4. järku diferentsiaalvõrrand (vt. [1]):

$$\mathbf{E \cdot I \cdot y^{''''}(t) = f(x).} \tag{8.1}$$

- $y(x)$ näitab keha nihkumist tasakaaluasendist (meetrites) kohal x.
- E on tala materjali elastsusmoodul ehk Young'i moodul.
- I on ristlõike inertsimoment.
- $f(x)$ on talale mõjuv välisjõud koos tala enda kaaluga ühe pikkusühiku kohta.
- Rajatingimused

  $$\mathbf{y(0) = y^{'}(0) = y^{''}(L) = y^{'''}(L) = 0} \tag{8.2}$$

  tähendavad, et tala on vasakul otspunktis $x = 0$ jäigalt kinnitatud ja teises otspunktis $x = L$ vaba.
- L on tala pikkus meetrites.

Viited

[1] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.

8.2 Harilik diferentsmeetod rajaülesande lahendamiseks

Märkus 8.1. *Kui $f(x) = f^{'}(x) = 0$, siis kehtib järgmine $O(h^2)$-järku valem:*

$$f^{''''}(x+h) \approx \frac{16 \cdot f(x+h) - 9 \cdot f(x+2h) + \frac{8}{3} \cdot f(x+3h) - \frac{1}{4} \cdot f(x+4h)}{h^4}. \tag{8.3}$$

Märkus 8.2. *Kui $f^{''}(x) = f^{'''}(x) = 0$, siis kehtivad järgmised $O(h^2)$-järku valemid:*

$$f^{''''}(x+h) \approx \frac{-28 \cdot f(x) + 72 \cdot f(x+h) - 60 \cdot f(x+2h) + 16 \cdot f(x+3h)}{17h^4}, \tag{8.4}$$

$$f^{''''}(x+h) \approx \frac{72 \cdot f(x) - 156 \cdot f(x+h) + 96 \cdot f(x+2h) - 12 \cdot f(x+3h)}{17h^4}. \tag{8.5}$$

1. Asendades neljanda tuletise $O(h^2)$-järku diferentsvalemiga

$$y^{''''}(x) \approx \frac{y(x-2h) - 4 \cdot y(x-h) + 6 \cdot y(x) - 4 \cdot y(x+h) + y(x+2h)}{h^4},$$

saame võrrandite süsteemi

$$\mathbf{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{E \cdot I} f(x_i), \quad i = 2, \ldots, N-2.}$$

Kuna $y_0 = 0$ on antud rajatingimustest, siis peame veel lisama kolm võrrandit, et meil tekiks N võrrandit ja N tundmatut $(y_1, \ldots, y_N)$. Tingimusel $y_0 = 0$ ja $y_0' = 0$ kehtib punktis x_1 võrrand

$$16y_1 - 9y_2 + \frac{8}{3}y_3 - \frac{1}{4}y_4 = \frac{h^4}{E \cdot I} f(x_1).$$

Kahes viimases punktis x_{N-1} ja x_N saab rajatingimuste $y''(x_N) = 0$ ja $y'''(x_N) = 0$ kehtides ebasümmeetriliste diferentsvalemite abil välja kirjutada kaks viimast võrrandit:

$$16y_{N-3} - 60y_{N-2} + 72y_{N-1} - 28y_N = 17\frac{h^4}{E \cdot I} f(x_{N-1}),$$

$$-12y_{N-3} + 96y_{N-2} - 156y_{N-1} + 72y_N = 17\frac{h^4}{E \cdot I} f(x_N).$$

2. Tootud võrranditest moodustame lineaarvõrrandite süsteemi

$$A \cdot y = F,$$

kus $y = (y_0, y_1, \ldots, y_N)^T$, F on vastava süsteemi vabaliige ja A on $((N+1) \times (N+1))$-mõõtmeline ruutmaatriks. Siin on juba arvesse võetud, et $y_0 = 0$,

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1N} \\
a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2N} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{N0} & a_{N1} & \cdots & a_{NN}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}.
$$

Arvutis peame tüüpiliselt kõigile vektoritele ja maatriksitele reserveerima mälu.

```
A = zeros( N+1 , N+1 ) // süsteemi Ay=F maatriks
F = zeros( N+1 )       // süsteemi Ay=F vabaliige
```

3. Tavaliselt peame for-tsüklite abil täitma maatriksi A ja vabaliikme F õigete väärtustega.

```
for i = 1 : N+1
      F( i ) =  // õige avaldis
   for j = 1 : N+1
      A( i , j ) =  // õige avaldis
   end
end
```

Tegelikult on siin võimalik ka kavalam olla, arvestades, et meil on nullist erinev vaid peadiagonaal ja tema kaks kõrvaldiagonaali. Näiteks,

```
A( 1 , 1 ) = 1 // esimene võrrand on y(0)=0
A( 2 , 2:5 ) = [ 16 , −9 , 8/3 , −1/4 ]
```

4. Lahendame süsteemi $Ay = F$ hõredate maatriksite käsu abil.

```
A = sparse( A )        // Uue A väärtused defineeritakse vaid seal,
                       // kus A on nullist erinev.
y = umfpack( A , '\', F ) // lahendame Ay = F,
                          // hõreda maatriksi A korral
```

8.3 Praktikumi ülesanne

1. Olgu 2 meetri pikkune hüppelaud tehtud harilikust ebatsuugast (ingl k. *Douglas fir, Oregon pine*). Ebatsuuga tihedus on u. 480 kg/m^3, Young'i moodul tuleb siis

$$E = 1.3 \cdot 10^{10} \text{ paskalit } (N/m^2).$$

Hüppelaua ristlõike inertsimoment on

$$I = \frac{w \cdot d^3}{12},$$

kus w on laua laius ja d on laua paksus meetrites. Konkreetselt, olgu laius 40 cm ja paksus 2 cm.

2. Me alustame olukorrast, kus hüppelaual ei ole kedagi peale igava välja ja tühja liiva ... See tähendab, et lauale mõjub ainult tema endaga seotud jõud (N/m) suurusega

$$f(x) = -480 \cdot g \cdot w \cdot d,$$

kus $g = 9.81\ m/s^2$ on raskuskiirendus.

3. Jõuame olukorda, kus meie rutiinset tööd segab veel nooruke 150 kg kaaluv tsirkuse gorilla,

kes otsustab suurest uudishimust hüppelaua lahtises otsas all olevat vett uudistada (ütleme, et tema käpakesed hõivavad viimased 30 cm lauast). Meie jaoks tähendab see eelmise jõufunktsiooni f asendamist järgmisega:

$$f(x) = -480 \cdot g \cdot w \cdot d - \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , 0 \leq x < 1.7 \\ \frac{150}{0.3} \cdot g & , 1.7 \leq x \leq 2 \end{array} \right\}.$$

4. Kukub, ei kuku ...?

5. Kuidas muutub olukord, kui hüppelaua laiust või siis hoopis laua paksust suurendatakse kaks korda? Kummal juhul paindub hüppelaud vähem?

6. Proovige arvutada 1. ülesannet $N = 10 \cdot 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ korral. Tulemusi saab võrrelda täpse lahendiga

$$y(x) = \frac{-480 \cdot g \cdot w \cdot d}{24 \cdot E \cdot I} \cdot x^2 \cdot (x^2 - 4 \cdot L \cdot x + 6 \cdot L^2).$$

Piisab arvutada lahendi ja lähislahendi vahe punktis $x = b$. Millise k väärtuse korral on viga kõige väiksem ja millise korral kõige suurem ning mis võiks olla sellise käitumise põhjus?