1. Defineerida piirväärtus $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

   Lahendus. Funktsiooni $f(x)$ piirväärtus protsessis $x \to 0$ on lõpmatus (võib ka öelda, et funktsioon $f(x)$ kasvab protsessis $x \to 0$ tõkestamatult), kui iga $E > 0$ korral leidub selline positiivne $\delta > 0$, et iga argumendi x korral nulli ümbrusest $0 < |x| < \delta$ järeldub, et $f(x) > E$.

   Kommentaar. Teisisõnu, ükskõik kui suure reaalarvu $E > 0$ me ka ei võtaks, siis kasutades x väärtusi nullile kuitahes lähedalt, me saame ikkagi, et $f(x) > E$.

2. Tõestage piirväärtuse definitsiooni abil, et $\lim_{x\to 0} \frac{4}{x^2} = \infty$.

   Lahendus. Esimeses ülesandes on meil definitsioonist teada, mida näidata on vaja. Märgime, et järgmised tingimused on samaväärsed:

$$f(x) > E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{x^2} > E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{E} > x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{E}} > |x|.$$

   Seega näeme, et võime võtta $\delta = \frac{2}{\sqrt{E}}$ (täidetud on ka tingimus $\delta > 0$). Tõepoolest, sel juhul ükskõik millise $E > 0$ me ka ei võtaks, siis iga x korral piirkonnast $0 < |x| < \frac{2}{\sqrt{E}}$ saame

$$|x| < \frac{2}{\sqrt{E}} \quad \Rightarrow \quad x^2 < \frac{4}{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{x^2} > E.$$

   Märgime, et siinjuures tingimused $E > 0$ ja $|x| > 0$ tähendasid ka seda, et nende suurustega võrratusi korrutades või jagades ei muutunud võrratuse märk vastupidiseks. Väärtuste positiivsust või negatiivsust peab sarnastes ülesannetes alati jälgima.

3. Leidke hulga $\left\{\frac{1}{n^2-1} : n = 2,3,4,\ldots\right\}$ alumiste tõkete hulk ning näidake, et 0 on antud hulga alumine raja.

   Lahendus. Esiteks märgime, et meie hulk on kujul $X = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \ldots\right\}$. Seega on hulga maksimulement $\frac{1}{3}$ ja ülejäänud liikmed n kasvades lähenevad nullile.

   Hulga X kõikide alumiste tõkete hulk on $(-\infty, 0]$ ehk $\{\, x \mid -\infty < x \le 0 \,\}$.

   Näitame, et 0 on hulga X alumine raja ehk kõige suurem alumine tõke.

   1) Esiteks $\frac{1}{n^2-1} > 0$ iga $n = 2,3,4,\ldots$ korral, s.t. iga element hulgast X on suurem kui 0 ja seega on 0 selle hulga üks alumistest tõketest.

   2) Kuna hulk X on alt tõkestatud ja mittetühi, siis pidevuse aksioomi kohaselt leidub hulgal X alumine raja (ei tohi unustada, et põhjenduseta ei ole sugugi selge, et see tõepoolest leidub). Meie kandidaat alumise raja rolli on reaalarv 0.

   3) Oletame vastuväiteliselt, et 0 ei ole suurim alumine tõke. Sel juhul peab pidevuse aksioomi kohaselt leiduma mingi muu reaalarv, mille tähistame näiteks tähega m. Sel juhul m on hulga X alumine tõke ehk iga $n = 2,3,4,\ldots$ korral $\frac{1}{n^2-1} \ge m$. Samal ajal on m ka suurim alumine tõke ehk $m > 0$ (kuna m ja 0 mõlemad on alumised tõkked ja m on suurem). Seega

$$m \le \frac{1}{n^2-1} \quad \Rightarrow \quad n^2 - 1 \le \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad n^2 \le \frac{1}{m} + 1 \quad \Rightarrow \quad n \le \sqrt{\frac{1}{m}+1}, \quad n = 2,3,4,\ldots.$$

   Viimane järeldus tähendab aga seda, et lõplik reaalarv $\sqrt{\frac{1}{m}+1}$ on naturaalarvude hulga ülemine tõke, mis on aga vastuolus faktiga, et naturaalarvude hulk on ülalt tõkestamata. Oletus, et leidub selline alumine tõke $m > 0$, osutus vääraks. Järelikult on reaalarv 0 hulga X alumine raja.

4. Leidke piirväärtus $\lim_{x\to 3} \frac{3-x}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}$.

   Lahendus. Kuna nii nimetajas kui lugejas on elementaarfunktsioonid, siis võime kasutada omadust $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ja eraldi leida, et $\lim_{x\to 3}(3-x) = 0$ ning $\lim_{x\to 3}(\sqrt{x-1}-\sqrt{2}) = 0$. Seega saime suhte $\frac{0}{0}$, mis ütleb, et piirväärtust nii sirgjooneliselt ei õnnestu leida ja peame oma avaldist kuidagi teisendama. Antud jagatis $\frac{3-x}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}$ on seda tüüpi, kus murru lugejat ja nimetajat korrutatakse nimetajas oleva avaldisega sarnase suurusega, kasutades omadust $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Seega

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{3-x}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}} &= \lim_{x\to 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{2})(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-1})^2-(\sqrt{2})^2} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{x-3} = \lim_{x\to 3}(-1)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.\end{aligned}$$