Matemaatiline analüüs I, inf1, read 2012

1. Näidake rea $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+3}$ absoluutset või tingimisi koondumist või hajumist.

   Lahendus. Juba ette võib öelda, et tegemist on vahelduvate märkidega harmoonilise reaga (aste $\alpha=1$) ja seega see on tingimisi koonduv. Järgnevalt näitame seda.

   1.a) Kontrollime rea koondumise tarvilikku tingimust. Selleks, et antud rida oleks koonduv, on tarvilik, et
   $$\lim_{k\to\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+3}=0.$$
   Viimane rida on ilmselgelt õige. Siin kasutasime jada omadust, et $\lim u_k=0 \Leftrightarrow \lim|u_k|=0$.

   1.b) Absoluutse koonduvuse jaoks on vajalik, et rida $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+3}$ oleks koonduv. Kuna
   $$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k+3}=\frac{1}{2}\neq 0,$$
   siis esialgne rida koondub absoluutselt või hajub samaaegselt reaga $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Viimane on aga hajuv harmooniline rida $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha}$ astmega $\alpha=1$, seega esialgne rida asoluutselt ei koondu.

   1.c) Leinizi tunnuse järgi peavad kehtima omadused
   $$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+3}=0, \quad \frac{1}{2k+3}\geq\frac{1}{2k+5}\,\forall k=1,2,\ldots.$$
   Viimane on ilmselgelt õige. Seega meie esialgne rida koondub Leibnizi tunnuse põhjal tingimisi.

   1.d) Vaatleme juhtu, kus ülesandes oli trükiviga. Siis oli kirjas rida
   $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2n+3},$$
   kus probleem on, et n ei sõltu summeerimisindeksist k. Antud rida oleks siis sarnane reaga $\sum(-1)^k$, mis ilmselgelt ei koondu. Absoluutse koonduvuse kontrolliks saame, et $\sum 1\to\infty$ ja $\sum(-1)^k$ korral ei eksisteeri piirväärtust osasummadest
   $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k.$$
   Siin saab kasutada ka omadust, et rea koondumise tarvilik tingimus ei ole täidetud, kuna
   $$\lim_{k\to\infty}u_k=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{k\to\infty}|u_k|=0,$$
   aga kahjuks
   $$\lim_{k\to\infty}|(-1)^k|=1\neq 0.$$

2. Näidake rea $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^k}{k^e}$ koondumist või hajumist.

   Lahendus.

1.a) Rea koondumise tarvilikku tingimust $\lim u_k = 0$ on siin natukene tülikas kontrollida. Võtame appi näiteks Cauchy tunnuse:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{e^k}{k^e}} = \lim_{k\to\infty} \frac{e}{(\sqrt[k]{k})^e} = e > 1.$$

Cauchy tunnuse põhjal rida hajub.

1.b) Sama asi D'Alembert'i tunnuse abil:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{k+1}}{(k+1)^e} \frac{k^e}{e^k} = \lim_{k\to\infty} e\left(\frac{k}{k+1}\right)^e = e > 1.$$

Seega ka D'Alembert'i tunnuse põhjal rida hajub.

3. (2p) Leida astmerea $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k (x-1)^k$ koonduvusraadius R ja koonduvuspiirkond X.

Lahendus. Vaatleme lihtsuse mõttes summat

$$S(y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k y^k, \quad y = x - 1.$$

3.a) Cauchy tunnuse abil saame, et koonduvusraadius

$$\frac{1}{R} = \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{2^k} = 2, \quad \Rightarrow R = \frac{1}{2}.$$

3.b) Ilmselgelt saame, et

$$S(1/2) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \to \infty$$

ja

$$S(-1/2) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \quad \text{ei koondu.}$$

Saime, et otspuntkides $-1/2$ ja $1/2$ meie astmerida ei koondu. Järelikult koonduvusvahemik $Y = (-1/2, 1/2)$.

3.c) Arvestades, et $x = y + 1$, siis saame lõppvastuseks, et koonduvusraadius $R = 1/2$ ja koonduvusvahemik $X = (1/2, 3/2)$.

4. (2p) Näidake rea $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt[k]{3}}$ absoluutset või tingimisi koondumist või hajumist.

Lahendus. Esiteks märgime, et

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{3}} = 1.$$

Viimane on selge piirväärtuse keskmise omaduse tõttu,

$$\sqrt[k]{1} \le \sqrt[k]{3} \le \sqrt[k]{k}.$$

Kuna $\lim \sqrt[k]{1} = 1$ ja $\lim \sqrt[k]{k} = 1$, siis ka $\lim \sqrt[k]{3} = 1$.

Kõik see kokku tähendab, et rea koonduvuse tarvilik tingimus $\lim u_k = 0$ ei ole täidetud ja järelikult meie rida hajub.

5. (2p) Näidake rea $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \tan \frac{2\pi}{5^k}$ koondumist või hajumist.

Lahendus. Näitame, et rida koondub. Kuna rea üldliige u_k on positiivne (me kasutame tangensi väärtusi ainult nulli positiivses ümbruses), võime võrdluseks kasutada rida $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \frac{2\pi}{5^k}$. Need kaks rida koonduvad ja hajuvad samaaegselt, kuna (märgime, et $\lim \frac{tanx}{x} = 1$, kui $x \to 0$)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3^k \tan \frac{2\pi}{5^k}}{3^k \frac{2\pi}{5^k}} = 1 \neq 0.$$

5.a) Rea $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \frac{2\pi}{5^k}$ koonduvuse uurimiseks kasutame näiteks Cauchy tunnust:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{3^k \frac{2\pi}{5^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{5} \sqrt[k]{2\pi} = \frac{3}{5} < 1.$$

Cauchy tunnuse järgi meie kandidaatrida koondub, järelikult koondub ka esialgne rida.

5.b) Märgime, et tegelikult piisab ka märkida, et $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k$ on koonduv geomeetriline rida korda-jaga $\frac{3}{5} < 1$. Summat ei ole küll vaja leida, aga tegelikult

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \frac{2\pi}{5^k} = \frac{3}{5} 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{3}{5} \frac{2\pi}{1 - \frac{3}{5}} = 3\pi.$$