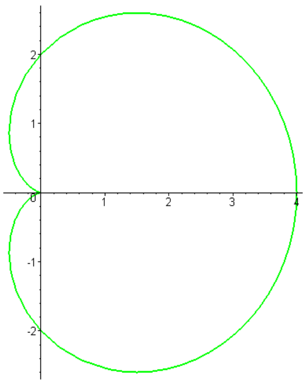
Ideaalse euroõuna ruumala

Kui me lõikame õuna varre juurest pooleks, siis saadud lõikepind meenutab matemaatikas tuntud joont, mida nimetatakse **kardioidiks**. Olgugi, et kardioid ei kirjelda õuna läbilõiget üks-ühele, siis ometigi võime teda päris edukalt kasutada, kui tahame arvutada õuna ligikaudset ruumala, pindala või näiteks ümbermõõtu.



Graafikul on kujutatud kardioidi raadiusega 2, seega läbimõõduga 4 ühikut (lühem telg õuna keskel varre otsast vaadatuna). Matemaatikas on kardioid kirja pandav polaarkoordinaatides valemiga

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{1} + \cos\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{1}$$

kus a on siis kardioidi raadius ehk pool lühema telje läbimõõtu, φ on kasutatav nurk ja r on antud nurgale vastav punkti kaugus koordinaatide alguspunktist. Et seda pilti näha klassikalisel xy-tasandil nagu joonisel, siis tuleb meil minna üle x ja y jaoks defineeritud polaarkoordinaatidele, mis on kirja pandav järgmiselt:

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{2}$$

Polaarkoordinaadid tähendavad siin, et igale nurgale φ saame leida punkti (x, y) kauguse r nullpunktist.

Ühendades valemid (1) ja (2) saamegi kardioidi jaoks xy-tasandil järgmised seosed:

$$\begin{cases} x &= a(1+\cos\varphi)\cos\varphi \\ y &= a(1+\cos\varphi)\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{3}$$

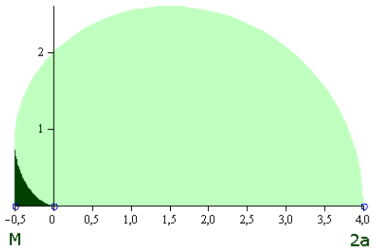
Õuna ruumala leidmiseks kasutame suhteliselt lihtsat meetodit, pannes kardioidi joone ümber x-telje pöörlema. Paneme tähele, et sel juhul tekib meil iga x väärtuse jaoks ümber x-telje ringjoon raadiusega y. Ringjoone pindala oli aga teatavasti πR^2. Seega tekib meil ümber x-telje pöörleva kujundi ristlõike pindala

$$S(x) = \pi y^2. \tag{4}$$

Keha ruumala kahe tasandi $x = \alpha$ ja $x = \beta$ vahel võib leida kui määratud integraali ristlõike pindalast

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} S(x)\,dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Läheme nüüd täpsemalt meie kardioidi juurde. Esiteks peame arvesse võtma õuna südame juures asuvat tühimikku, kuna kujundi pöörlemisel ümber x-telje tekib ringjooneline kujund, mis on keskelt täidetud. Seega peaksime kogu pöördpinna ruumalast maha lahutama tekkiva tühimiku ruumala.



Arvestades valemeid (4)-(5) saame

$$V = \pi \int_M^{2a} y^2\, dx - \pi \int_M^{0} y^2\, dx, \tag{6}$$

kus esimene integraal kirjeldab seest täidetud kardioidi ruumala ilma tühimikuta (kasutades kumera joone y väärtusi) ja teine integraal kirjeldab varre juures oleva tühimiku ruumala (kasutades nõgusa joone y väärtusi vasakust otspunktist M kuni punktini 0). Märgime, et punktile M vastab kardioidi joonel punkt $\left(-\frac{1}{4}a, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$.

Vahetades võrrandis (6) teises integraalis rajad (integraali märk muutub siis vastupidiseks), saame integraalid kokku liita ning tegelikult on kogu pöörleva kardioidi ruumala arvutatav valemiga

$$V = \pi \int_0^{2a} y^2\, dx. \tag{7}$$

Järgnevalt läheb meil vaja integreerimisvõtteid nagu näiteks muutujavahetus ja diferentsiaali märgi alla viimine. Suuruse y^2 leiame lihtsalt valemist (3). Lisaks läheb meil vaja diferentsiaali dx, mille leiame samuti valemist (3):

$$dx = \frac{dx}{d\varphi} d\varphi = x'(\varphi) d\varphi = (-a \sin\varphi - 2a \sin\varphi \cos\varphi) d\varphi = -a \sin\varphi (1 + 2\cos\varphi) d\varphi. \tag{8}$$

Viimaseks sammuks üleminekul ainult muutujast φ sõltuvale funktsioonile peame integraalis (7) muutma integraali rajad $0 \ldots 2a$. Paneme tähele, et kui $\varphi = 0$, siis valemist (3) saame et $x = a(1 + \cos 0) \cos 0 = a(1+1) \cdot 1 = 2a$. Analoogiliselt, kui $\varphi = \pi$, siis $x = a(1 + \cos\pi) \cos\pi = a(1-1) \cdot (-1) = 0$. Arvestades seda ja valemeid (7)-(8) saame

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2a} y^2\, dx = \pi \int_\pi^0 [a(1+\cos\varphi) \sin\varphi]^2 [-a \sin\varphi (1 + 2\cos\varphi)]\, d\varphi \\ &= -\pi a^3 \int_\pi^0 (1+\cos\varphi)^2 \sin^3\varphi (1 + 2\cos\varphi)\, d\varphi. \end{aligned} \tag{9}$$

Kuna $-\sin\varphi\, d\varphi = d(\cos\varphi)$ ja $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$, siis saame

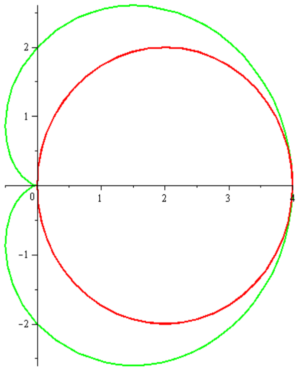
$$V = \pi a^3 \int_\pi^0 (1+\cos\varphi)^2 (1 - \cos^2\varphi)(1 + 2\cos\varphi)\, d(\cos\varphi). \tag{10}$$

Teeme muutujavahetuse $\cos\varphi = u$. Sel juhul muutuvad integraali rajad $\pi \ldots 0$ asemel $-1 \ldots 1$. Valem (10) teisendub kujule

$$V = \pi a^3 \int_{-1}^{1} (1+u)^2 (1-u^2)(1+2u)\, du. \tag{11}$$

Jääb veel üle viia arvutus lõpule. Järgnevas arvestame, et integraal paaritutest funktsioonidest u, u^3 ja u^5 on sümmeetriliste rajade korral võrdsed nulliga ja paarisfunktsioonide $1, u^2$ ja u^4 korral võime võtta kahekordse pooliku integraali:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi a^3 \int_{-1}^{1} (1+4u+4u^2-2u^3-5u^4-2u^5)\,du = 2\pi a^3 \int_0^1 (1+4u^2-5u^4)\,du \\
&= 2\pi a^3 \left(u+\frac{4}{3}u^3-u^5\right)\Big|_0^1 = 2\pi a^3 \left(1+\frac{4}{3}-1\right) = \frac{8}{3}\pi a^3.
\end{aligned} \tag{12}
$$



Tulemus

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\pi\,\mathbf{a^3} \tag{13}$$

ütleb meile, et pöörleva kardioidi ruumala on kaks korda suurem sama raadiusega a olevast kera ruumalast (viimane oli teatavasti $\frac{4}{3}\pi a^3$). Jooniselt võime näha sama raadiusega 2 olevat kardioidi ja ringi.

Kardioidi pindala

Leiame järgnevalt kardioidi pindala ehk siis ligikaudselt ka pooleks lõigatud õuna sisemise kihi pindala. Selleks võime kasutada kõversektori pindala valemit polaarkoordinaatide jaoks:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi, \quad \alpha,\beta \in [0,2\pi]. \tag{14}$$

Seega algsest valemist (1) saame

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{a^2}{2}(\varphi+2\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \pi a^2 + \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2\varphi))\,d\varphi \\
&= \pi a^2 + \frac{a^2}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi a^2 + \pi\frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Tulemus

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\pi\mathbf{a^2} \tag{16}$$

ütleb, et kardioidi pindala on poolteist korda suurem kui ringi pindala πa^2.

Kardioidi joone pikkus

Lõpetuseks leiame kardioidi joone pikkuse ehk siis ka ligikaudse õuna ümbermõõdu (mõõdetuna keskelt ja arvestades varre osas olevat õõnsust). Selleks kasutame parameetriliselt antud funktsiooni joone kaare pikkuse valemit

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(\varphi)]^2 + [y'(\varphi)]^2}\, d\varphi, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Seega algsest valemitest (3) saame

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[-a(1+2\cos\varphi)\sin\varphi]^2 + [a(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]^2}\, d\varphi \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1+2\cos\varphi)^2 \sin^2\varphi + [(1+2\cos\varphi)\cos\varphi - 1]^2}\, d\varphi \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1+2\cos\varphi)^2 \sin^2\varphi + (1+2\cos\varphi)^2\cos^2\varphi - 2(1+2\cos\varphi)\cos\varphi + 1}\, d\varphi \qquad (18) \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{[(1+2\cos\varphi) - \cos\varphi]^2 + 1 - \cos^2\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi = 4a\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\left(\frac{\varphi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Teeme muutujavahetuse $u = \dfrac{\varphi}{2}$ ning arvestades funktsioonide $\cos x$ ja $-\cos x$ sümmeetriat lõigul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ja $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ saame

$$s = 8a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\, du = 8a \sin u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a(1-0) = 8a. \tag{19}$$

Kardioidi ümbermõõt

$$\mathbf{s = 8a} \tag{20}$$

on sama raadiusega ringi omast veidi suurem (ringi korral on ümbermõõt $2\pi a \approx 6,28a$ ehk pisut rohkem kui kolmveerand kardioidi ümbermõõdust).