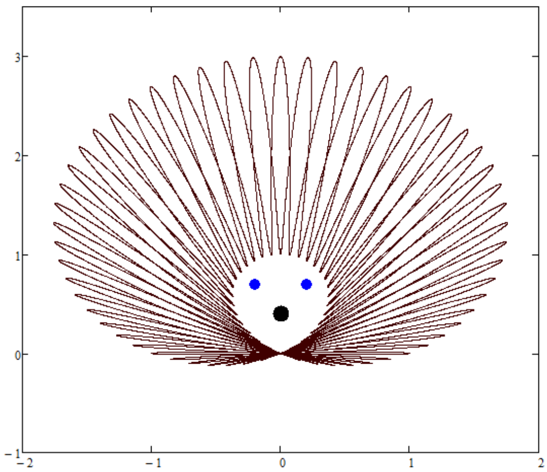
Polaarkoordinaadid. Kujundi pindala

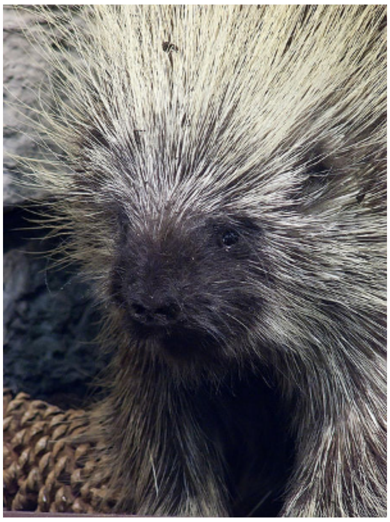
Okassiga

Vaatleme polaarkoordinaatides antud joont

$$r(\varphi) = \cos(44\varphi) + 2\sin(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{1}$$

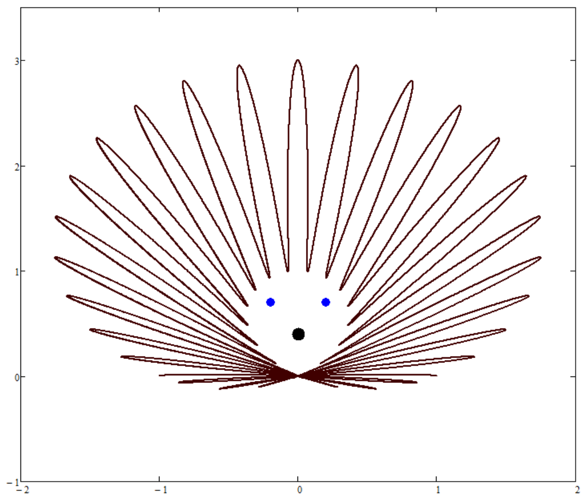
Joonisel kujutab see joon endast okkad turri ajanud okassiga (tõsi, eks me lisanud sinna veel paar täpikest ...).

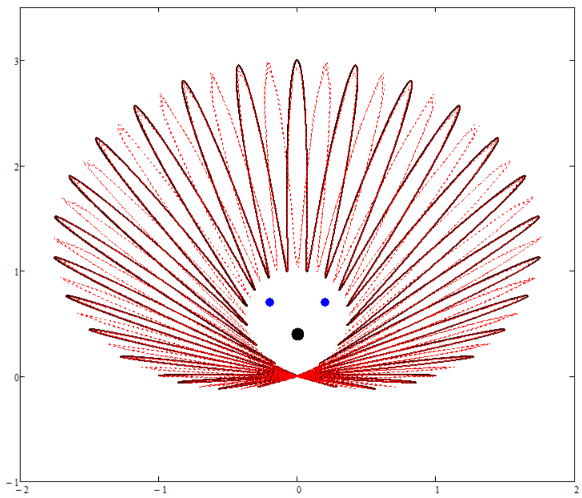




Märgime, et liikmes $\cos(44\varphi)$ saab okkaid juurde lisada, võttes 44 asemel mingi suurema arvu.

Märkus 1 *Jätame hetkel kõrvale selle tülika probleemi, et tegelikult tekib siin okaste kattumine ja mingid alad arvutatakse all pool topelt. Täpseks arvutamiseks peaksime tunduvalt rohkem vaeva nägema. Juba nurga* $\varphi \in [0, \pi]$ *korral tekib järgmine kujund (vasakul):*





Pindala leidmiseks kasutame kõversektori pindala valemit,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(44\varphi) + 2\sin(\varphi)\right]^2\,d\varphi. \tag{2}$$

Siit saame

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos^2(44\varphi) + 4\sin^2(\varphi) + 4\cos(44\varphi)\sin(\varphi)\right]\,d\varphi. \tag{3}$$

Kasutame järgmisi trigonomeetrilisi abivalemeid:

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x) \quad \Rightarrow \quad \cos^2(44\varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(88\varphi)), \tag{4}$$

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x) \quad \Rightarrow \quad 4\sin^2(\varphi) = 2(1 - \cos(2\varphi)), \tag{5}$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2} \quad \Rightarrow \tag{6}$$

$$4\cos(44\varphi)\sin(\varphi) = 2[\sin(45\varphi) - \sin(43\varphi)]. \tag{7}$$

Võttes kõik kokku, saame

$$S = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1 + \cos(88\varphi))\,d\varphi + \int_0^{2\pi}(1 - \cos(2\varphi))\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\sin(45\varphi)\,d\varphi - \int_0^{2\pi}\sin(43\varphi)\,d\varphi. \tag{8}$$

Integreerime,

$$S = \frac{5}{2}\pi + \left[\frac{\sin(88\varphi)}{4\cdot 88} - \frac{\sin(2\varphi)}{2} - \frac{\cos(45\varphi)}{45} + \frac{\cos(43\varphi)}{43}\right]_0^{2\pi} = \frac{5}{2}\pi. \tag{9}$$

Saime vastuseks

$$S = \frac{5}{2}\pi \approx 7.854. \tag{10}$$

Toome lisaks alternatiivse lahenduse, kus trigonomeetriliste valemite asemel kasutatakse kompleksarve. Viimane lubab kasutada eksponentfunktsiooni integreerimist, mis on praktikas väga lihtne. Tõsi, selleks peab teadma vähemalt ühte väga tähtsat seost - Euleri valemit:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi), \quad i^2 = 1. \tag{11}$$

Asja eeliseks on, et kompleksarvudega opereerimisel peab Euleri valemit niikuinii teadma, kuid teisi trigonomeetrilisi valemeid ei ole vaja tunda. Kasutades Euleri valemit φ ja $-\varphi$ korral, saab tuletada seosed

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{12}$$

Meeles tuleb pidada seda, et kompleksarvude kasutamisel läheb meile vastuse jaoks vaja ainult reaalosa,

$$S = \frac{1}{2}Re\left(\int_0^{2\pi}\left[\frac{e^{i44\varphi} + e^{-i44\varphi}}{2} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{i}\right]^2\,d\varphi\right). \tag{13}$$

Siit saame

$$S = \frac{1}{2} Re\left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{i88\varphi} + e^{-i88\varphi} + 2}{4} + \frac{e^{i45\varphi} - e^{-i45\varphi} - e^{i43\varphi} + e^{-i43\varphi}}{i} - e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi} + 2 \right] d\varphi \right). \tag{14}$$

Integreerime,

$$S = \frac{5}{2}\pi + \frac{1}{2} Re\left(\left[\frac{e^{i88\varphi}}{4 \cdot 88i} - \frac{e^{-i88\varphi}}{4 \cdot 88i} - \frac{e^{i45\varphi}}{45} - \frac{e^{-i45\varphi}}{45} + \frac{e^{i43\varphi}}{43} + \frac{e^{-i43\varphi}}{43} - \frac{e^{i2\varphi}}{2i} + \frac{e^{-i2\varphi}}{2i} \right]_0^{2\pi} \right). \tag{15}$$

Kasutades uuesti Euleri valemit ja arvestades ainult reaalosa, võime kirjutada

$$S = \frac{5}{2}\pi + \frac{1}{2} \left[\frac{2\sin(88\varphi)}{4 \cdot 88} - \frac{2\cos(45\varphi)}{45} + \frac{2\cos(43\varphi)}{43} - \sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} = \frac{5}{2}\pi. \tag{16}$$

Viimast integreerimist võib võrrelda avaldises (9) tehtuga. Näeme, et tulemus on identne. Kompleksarvude kasutamine võib sageli viia vahetulemused pikemaks, aga see-eest ei pea teadma igasugu erinevaid koosinuste ja siinuste liitmise ja korrutamise valemeid.

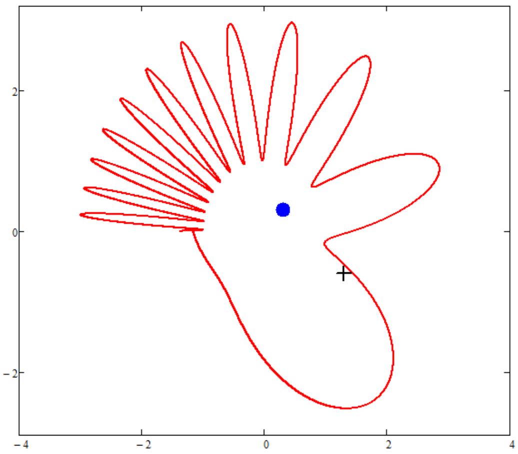
Märkus 2 *Leides pindala ainult nurga $\varphi \in [0, \pi]$ korral, saame analoogiliselt „hõredama" oksassea kogu ristlõike pindalaks $S_0 = \frac{5}{4}\pi$.*

Punkar

Vaatleme polaarkoordinaatides antud joont

$$r(\varphi) = \sin(2^{\varphi}) - 2, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{17}$$

Joonisel kujutab see joon mingil määral punkarit.



Antud joonega piiratud kujundi pindala leidmiseks kasutame kõversektori pindala valemit,

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\sin(2^{\varphi}) - 2 \right]^2 d\varphi. \tag{18}$$

Tehes muutujavahetuse $u = 2^{\varphi}$, saame $du = 2^{\varphi}\ln 2 d\varphi = u \ln 2 d\varphi$ ja

$$S = \frac{1}{2\ln 2}\int_1^{4^{\pi}} \frac{1}{u}\left[\sin(u) - 2\right]^2 du = \frac{1}{2\ln 2}\int_1^{4^{\pi}} \left[\frac{\sin^2 u}{u} - 4\frac{\sin u}{u} + \frac{4}{u}\right] du. \tag{19}$$

Kasutades abivalemit $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$, viime viimase avaldise kujule

$$S = \frac{1}{2\ln 2}\int_1^{4^{\pi}} \left[\frac{9}{2u} - \frac{\cos 2u}{2u} - 4\frac{\sin u}{u}\right] du. \tag{20}$$

Integreerime selle osa, mida annab veel täpselt integreerida,

$$S = \frac{9}{4\ln 2}\ln|u|\Big|_1^{4^{\pi}} - \frac{1}{2\ln 2}\int_1^{4^{\pi}} \left[\frac{\cos 2u}{2u} + 4\frac{\sin u}{u}\right] du, \tag{21}$$

ehk

$$S = \frac{9}{2}\pi - \frac{1}{2\ln 2}\left[4\int_1^{4^{\pi}} \frac{\sin u}{u}\, du + \frac{1}{2}\int_2^{2\cdot 4^{\pi}} \frac{\cos u}{u}\, du\right]. \tag{22}$$

Nüüd me oleme jõudnud integraalideni, mida ei õnnestu enam elementaarfunktsioonide abil leida. Märgime, et matemaatikas on sisse toodud integraalse siinuse mõiste ja vastav funktsioon defineeritakse järgmise avaldisega:

$$Si(x) := \int_0^{x} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\, d\varphi. \tag{23}$$

Analoogiliselt on olemas integraalne koosinuse funktsioon,

$$Ci(x) := -\int_x^{\infty} \frac{\cos\varphi}{\varphi}\, d\varphi, \tag{24}$$

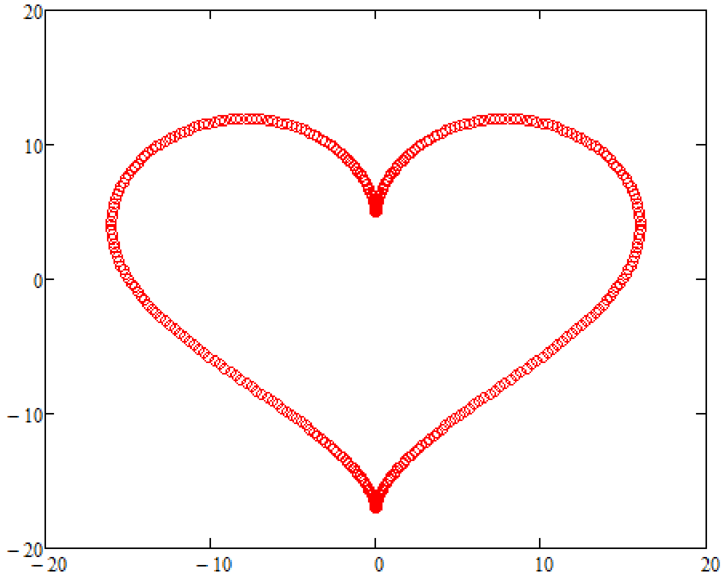
kuid antud ülesandes me seda ei kasuta, kuna tegemist on lõpmatu rajaga päratu integraaliga ja nö pluss ja miinus lisamise tehnika enam ei tööta. Viimati nimetatud integraalsete funktsioonide väärtusi saab ligikaudselt leida arvutipakettide abil. Vormistame oma vastuse järgmiselt:

$$S = \frac{9}{2}\pi - \frac{1}{2\ln 2}\left[4\mathrm{Si}(4^{\pi}) - 4\mathrm{Si}(1) + \frac{1}{2}\int_2^{2\cdot 4^{\pi}} \frac{\cos u}{u}\, du\right] \approx 12.460. \tag{25}$$

Süda

Vaatleme polaarkoordinaatides antud joont

$$r(\varphi) = 13\cos(\varphi) - 5\cos(2\varphi) - 2\cos(3\varphi) - \cos(4\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{26}$$



Südame „suuruse“ leidmiseks kasutame kõversektori pindala valemit,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[13\cos(\varphi) - 5\cos(2\varphi) - 2\cos(3\varphi) - \cos(4\varphi)\right]^2 d\varphi. \tag{27}$$

Nüüd läheb asi pisut keeruliseks. Neid koosinusfunktsioone on üksteise otsa liidetud juba nii palju, et midagi tuleks ette võtta. Meie kasutame siin järgmisi abivalemeid:

$$cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1,$$

$$cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x),$$

ja

$$cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1.$$

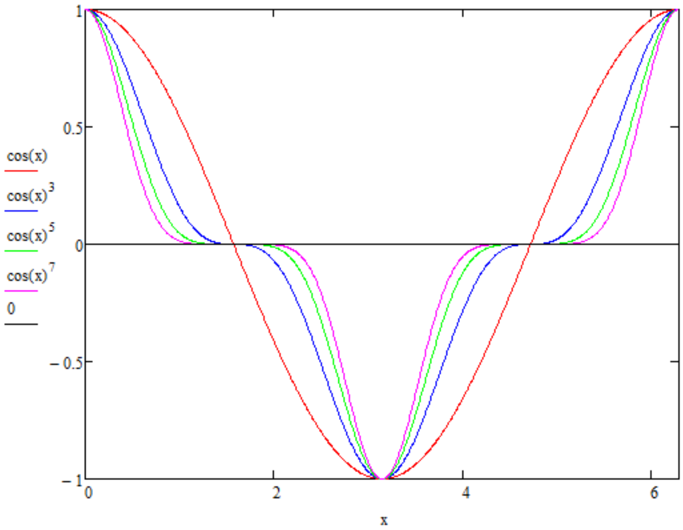
Teisendame,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[4 + 19\cos(\varphi) - 2\cos^2(\varphi) - 8\cos^3(\varphi) - 8\cos^4(\varphi)\right]^2 d\varphi. \tag{28}$$

Ka järgnev ruutu võtmine on üsna pikk ja tehniline protseduur (õnneks küll sisult mitte eriti keeruline). Tulemuseks saame

$$\begin{aligned} S = \; & \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[16 + 152\cos(\varphi) + 345\cos^2(\varphi) - 140\cos^3(\varphi) - 364\cos^4(\varphi)\right. \\ & \left. -272\cos^5(\varphi) + 96\cos^6(\varphi) + 128\cos^7(\varphi) + 64\cos^8(\varphi)\right] d\varphi. \end{aligned} \tag{29}$$

Nüüd tasub tähele panna, et integraal lõigus $[0, 2\pi]$ funktsiooni $\cos(x)$ paaritutest astmetest on null. Põhjuseks on loetletud funktsioonide sümmeetrilisus nurga π suhtes, kus x-teljest üles ja alla jäävad pindalad on omavahel võrdse suurusega ja vastasmärgilised (vt. joonis).



Näiteks,

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\, d\varphi = \sin(\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Viimati toodud omadus lubab meil kirjutada

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[16 + 345\cos^2(\varphi) - 364\cos^4(\varphi) + 96\cos^6(\varphi) + 64\cos^8(\varphi)\right] d\varphi. \tag{30}$$

Arvestades paarisfunktsioonide omadusi, saame

$$S = 16\pi + \int_0^{\pi} \left[345\cos^2(\varphi) - 364\cos^4(\varphi) + 96\cos^6(\varphi) + 64\cos^8(\varphi)\right] d\varphi \tag{31}$$

ehk

$$S = 16\pi + \int_0^{\pi} \cos^2(\varphi)\left[345 - 364\cos^2(\varphi) + 96\cos^4(\varphi) + 64\cos^6(\varphi)\right] d\varphi. \tag{32}$$

Järgnevalt teisendame integraali valemi

$$\cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi))$$

abil. Märgime, et $\cos^4(\varphi) = (\cos^2(\varphi))^2$ ja $\cos^6(\varphi) = (\cos^2(\varphi))^3$. Tulemuseks saame

$$S = 16\pi + \int_0^{\pi} \left[\frac{195}{2} + \frac{85}{2}\cos(2\varphi) - 31\cos^2(2\varphi) + 28\cos^3(2\varphi) + 4\cos^4(2\varphi)\right] d\varphi. \tag{33}$$

Analoogiliselt on jällegi integraalid lõigul $[0,\pi]$ funktsiooni $\cos(2\varphi)$ paaritutest astmetest nullid. Siit järeldub, et

$$S = \frac{227}{2}\pi + \int_0^{\pi} \cos^2(2\varphi)\left[4\cos^2(2\varphi) - 31\right] d\varphi. \tag{34}$$

Edasi,

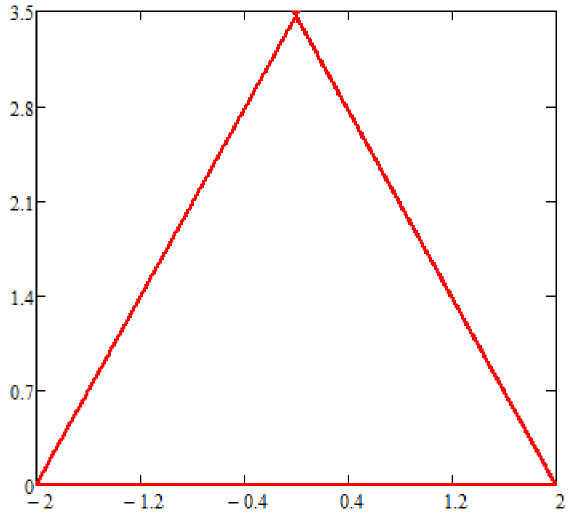
$$\begin{aligned} S &= \frac{227}{2}\pi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left[2\cos^2(4\varphi) - 27\cos(4\varphi) - 29\right] d\varphi = 99\pi + \int_0^{\pi} \cos^2(4\varphi)\, d\varphi \\ &= 99\pi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos(8\varphi))\, d\varphi = 99\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{199}{2}\pi. \end{aligned} \tag{35}$$

Puhtast südamest tulev vastus on

$$S = \frac{199}{2}\pi \approx 312.588. \tag{36}$$

Võrdkülgne kolmnurk polaarkordinaatides

Leida võrdkülgse kolmnurga pindala, kui külje pikkus on a.



Kolmnurga pindala ennast saab muidugi lihtsalt leida, vastus on $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Ülesanne on aga leida pindala kasutades polaarkoordinaate. Osutub, et selle lihtsa ülesande lahendus ei olegi nii triviaalne kui esmapilgul võiks oletada.
Vaatleme poolt kolmnurka ehk sirge võrrandit lõigul $[0, \frac{a}{2}]$,

$$y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}a. \tag{37}$$

Tehes muutujate vahetuse

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi), \tag{38}$$

läheme üle polaarkoordinaatidele,

$$r\sin\varphi = -\sqrt{3}r\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}a, \tag{39}$$

ehk

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a\left[\frac{1}{\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi}\right], \quad \varphi \in [0, \pi/2]. \tag{40}$$

Leiame terve kolmnurga pindala kahekordse pooliku kolmnurga pindalana,

$$S = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{3}{4}a^2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2\varphi + 3\cos^2\varphi + 2\sqrt{3}\sin\varphi\cos\varphi}\,d\varphi. \tag{41}$$

Järgnevalt teisendame pisut,

$$S = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+2\cos^2\varphi + \sqrt{3}\sin(2\varphi)}\, d(2\varphi) = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos(2\varphi)+\sqrt{3}\sin(2\varphi)}\, d(2\varphi). \tag{42}$$

Võttes $x = 2\varphi$, saame

$$S = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)}\, dx. \tag{43}$$

Nüüd teeme standardse muutujavahetuse

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

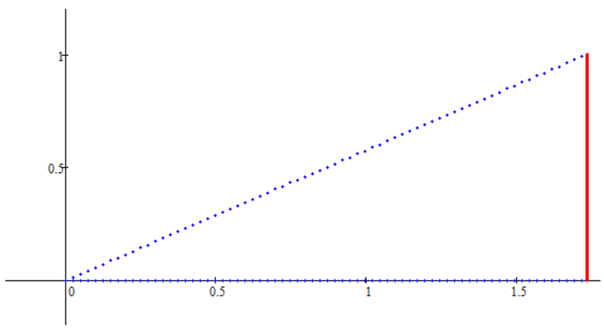
Saame

$$S = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\sqrt{3}\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \frac{3}{4}a^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+2\sqrt{3}t+3}\, dt. \tag{44}$$

Viimane integraal avaldub õnneks koonduva päratu integraalina,

$$S = \frac{3}{4}a^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(t+\sqrt{3})^2}\, dt = \frac{3}{4}a^2 \left(-\frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2. \tag{45}$$

Märkus 3 *Ülesannet annab lahendada ka lihtsamal moel. Selleks tuleks näiteks üks nurk asetada koordinaatide alguspunkti ja lasta polaarkoordinaatidel joonestada ainult vertikaalne sirge.*



Sel juhul pooliku kolmnurga alus x-teljel on pikkusega $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, kõrgus on $r\sin(\varphi)$ ja hüpotenuusi pikkus (ehk kolmnurga välise tipu kaugus nullpunktist) on r. Sellisel juhul saab Pythagorase teoreemist, et

$$r^2 = \frac{3}{4}a^2 \frac{1}{1-\sin^2(\varphi)} = \frac{3}{4}a^2 \frac{1}{\cos^2(\varphi)}, \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{6}]. \tag{46}$$

Kogu pindala avaldub järgmiselt:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2(\varphi)}\, d\varphi = \frac{3}{4}a^2 \tan(\varphi)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$