

Ülesanne 3. Operaatorid

1. [2p] Koostage $N \times N$ koosinusteisenduse maatriks C , mille liikmeteks on

$$i=0 \text{ korral } C_{0,j} = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{ ja } i=1,\dots,N-1 \text{ korral } C_{i,j} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \cdot \cos\left[\frac{i \cdot (2 \cdot j + 1) \cdot \pi}{2 \cdot N}\right]$$

Olgu $N=5$.

1) Veenduge, et C pöördmaatriks võrdub C transponeeritud maatriksiga. Viimane on kasulik omadus, kuna pöördmaatriksi leidmiseks kulub oluliselt rohkem tehteid, kui transponeerimisele.

2) Olgu antud andmete vektor $x=(10,20,30,40,50)$. Koostame vektori $y = C \cdot x^T$ Defineerime spetsiaalse funktsiooni

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot y_0 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \left[y_k \cdot \cos\left[\frac{k \cdot (2 \cdot t + 1) \cdot \pi}{2 \cdot N}\right] \right]$$

3) Veenduge, et iga $i=0,\dots,N-1$ korral kehtib $P(i) = x_i$

Viimane tähendab seda, et funktsiooni P graafik läbib igas sõlmes $0,\dots,N-1$ andmete vektoris antud punkte ehk interpoleerib andmeid.

Seda ideed kasutatakse ära piltide töötlemisel, kus andmete rollis on pildi iga piksli heledus. Pildi töötlemisel manipuleeritakse edasi juba kordajatega y_k või siis koosinuse argumendis olevate indeksitega.

Selliselt on võimalik programmeerida universaalseid filtreid ja operatsioone,

ilma et arvuti peaks muretsema, mis konkreetselt pildil asub, olgu see siis jõehobu või siil udus. Hiljem teisendatakse muudetud andmed tagasi uueks vektoriks, milles on uued heleduse väärtused.



2. [3p] Keskmisest karvasem jänes jookseb trajektrooril, mille korral saab x ja y koordinaate kirjeldada funktsioonidega

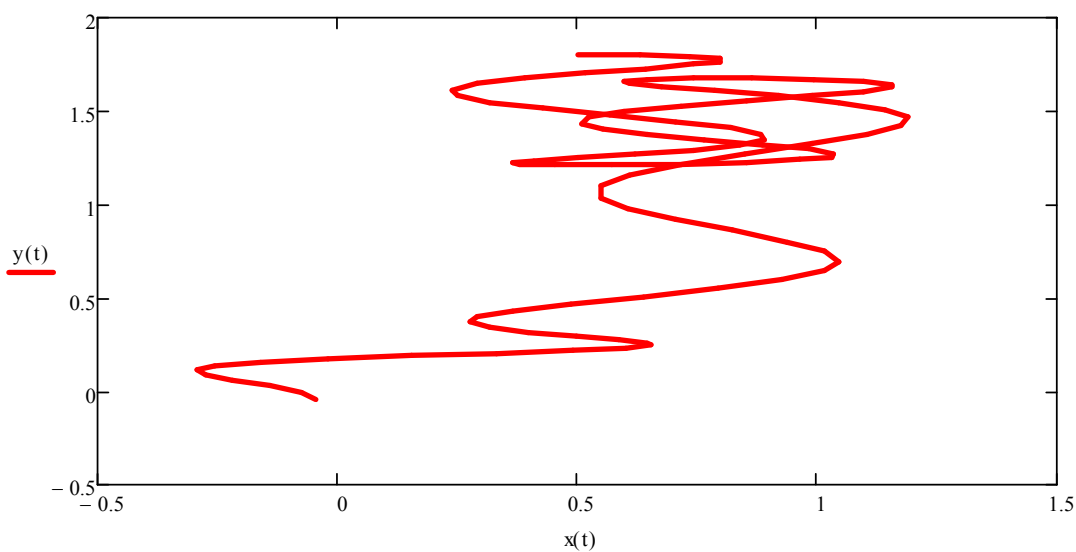
$$x(t) = 0.5 + 0.3 \cdot \sin(45t) + 3.9 \cdot t^2 - 4.7 \cdot t^3$$

$$y(t) = 1.5 + 0.3 \cdot \cos(12t) + 0.9 \cdot t^2 - 2.7 \cdot t^3$$

kus aeg t muutub 0-st 1-ni.

Leidke jänese poolt läbitud teepikkus $s = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ **ning tema**

lõppkiirus $v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ **punktides t=0.5 ja t=1.**



3. [2p] Leidke joone $y = x^{\frac{4}{3}}$, $-3 \leq x \leq 3$, **ümbes x-telje pöörlemisel moodustatud**

liivakella ruumala $V = \int_{-3}^3 y^2 dx$.



4. [3p] Kunstnikul on plaanis ümber vaasi graveerida joon $f(x) = \sin(2 \cdot x) + \sin(3x)^2$. Mitu sentimeetrit on see joon pikk, kui on teada, et vaasi ümbermõõt on $7 \cdot \pi$ sentimeetrit?

Vihje: Joone pikkus lõigul $[a,b]$ on leitav integraaliga

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2} dx .$$

Kumb variant kulutaks vähem materjali, kas joon $f(x)$ või lihtsalt kaks paralleelset joont ümber vaasi? Kas oleks kasu, kui muuta joonel sakke vähemaks, s.t. korrutada ruutliiget läbi 0.6-ga?

