Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

1 Reaalarvud ja kompleksarvud

Sisukord

1 Reaalarvud ja kompleksarvud **1**

1.1 Reaalarvud 2

1.2 Kompleksarvud 4

1.3 Kompleksarvu algebraline kuju 5

1.4 Kompleksarvu geomeetriline kuju 6

1.5 Tehted kompleksarvudega 6

1.6 Kompleksarvude ajaloost * 7

1.7 Kompleksarvude kasutamisest * 9

1.8 Fraktalid * 10

Kontrolltöö teemad

1. Reaalarvu absoluutväärtuse omadused (enamus neist on loogiliselt tuletatavad).
2. Kompleksarvude esitus aritmeetilise ja geomeetrilise kuju kaudu.
3. Kompleksarvu kaaskompleksarv ja moodul.
4. Tehted kompleksarvudega (näide 1.2).

Eksamiteemad

1. Mis on naturaalarvud, täisarvud, ratsionaalarvud, irratsionaalarvud, reaalarvud.
2. Mis on kompleksarvud.
3. Kompleksarvude esitus aritmeetilise ja geomeetrilise kuju kaudu.
4. Kompleksarvu kaaskompleksarv ja moodul.
5. Tehted kompleksarvudega (näide 1.2).

1.1 Reaalarvud

Arvud moodustavad mingis mõttes matemaatika vundamendi. Erinevat tüüpi arvudel võivad olla erinevad omadused ja kasutusvaldkonnad. Enne reaalarvudeni jõudmist, peame tutvuma veidi lihtsamate arvudega.

Saksa matemaatiku Leopold Kronecker'i (1823 - 1891) sõnul (vabas tõlkes) on *"naturaalarvud loodud Jumala poolt. Kõik teised arvud on loodud inimese poolt."*

Definitsioon 1.1

Tähistame sümboliga $\mathbb{N}$ kõigi naturaalarvude hulka,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

ja sümboliga $\mathbb{Z}$ kõigi täisarvude hulka,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Negatiivsete arvude sissetoomisega saab esitada näiteks järgmise anekdoodi: *Füüsik, bioloog ja matemaatik näevad, kuidas majja siseneb kaks inimest. Hiljem väljub sealt aga kolm inimest. Füüsik mõtleb: "Algne vaatlemine toimus teatud veaga." Bioloog arvab, et inimesed vahepeal paljunesid ja matemaatik ütleb: "Kui nüüd täpselt üks inimene siseneb majja, siis on maja uuesti tühi."*

Definitsioon 1.2

Ratsionaalarvudeks nimetatakse arve kujul $\frac{p}{q}$, kus p ja q on täisarvud ja $q \neq 0$. Kõigi ratsionaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathbb{Q}$.

Ratsionaalarvudeks on parajasti need arvud, mis on esitatavad lõplike (näiteks 3.895) või lõpmatute perioodiliste kümnendmurdudena (näiteks $15.9888\dots$ või $15.9\overline{8}$ või siis $15.9(8)$).

Eksamil (ka praktikumi tunnikontrollis) võidakse näiteks küsida ratsionaalarvu definitsiooni. Proovige seda sõnastada parajasti siis, kui konspekti käepärast ei ole ning nii, et teie vanatädi ka asjast aru saaks. Kas see, mille te sõnastasite, defineerib ikka küsitud ratsionaalarvu mõiste üheselt ära?

Analoogiliselt võidakse küsida irratsionaalarvu, reaalarvu ja kompleksarvu kohta.

Näide 1.1 Ratsionaalarvuks ei ole näiteks $\sqrt{2}$. Tõestame selle väite. Oletame vastuväiteliselt, et $\sqrt{2}$ on ratsionaalarv, s.t. esitub kujul $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, kus $q \neq 0$ ja $p, q \in \mathbb{Z}$. Seejuures eeldame, et murd $\frac{p}{q}$ on antud "taandatud kujul" (p ja q ei oma ühistegurit ja seda ei saa enam edasi "taandada"). Siit järeldub, et p ja q ei saa mõlemad korraga olla paarisarvud (muidu saab kahega läbi jagada). Algsest võrdusest saame ruutu tõstmisel seose

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2.$$

Siit järeldub, et p on paarisarv, kuna tema ruut esitub kahekordse arvu q^2 korrutisena (lisaks, paaritu arvu ruut on samuti paaritu). Kuna p on paarisarv, siis ta esitub kujul $p = 2r$, kus r on mingi tundmatu arv. Vaatleme uuesti oma eelmist avaldist,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{4r^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2r^2.$$

Viimane tähendab, et ka q on paarisarv (vastasel korral paaritu arvu ruut peab olema paaritu). Saime vastuolu sellega, et q ja p ei tohi olla korraga paarisarvud. Järelikult eeldus $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ oli väär.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 1.3

Arve, mis on esitatavad lõpmatute mitteperioodiliste kümnendmurdudena, nimetatakse irratsionaalarvudeks. Irratsionaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathbb{I}$.

Kuna irratsionaalarvudel on lõpmatu arv kümnendkohti, siis on selge, et päriselus ei ole võimalik lõpliku aja jooksul nende täpset väärtust välja arvutada. Mõõtmistel võib kasutada näiteks järgmist lähenemisviisi:

$$3.14155 \leq \pi \leq 3.14165$$

või

$$|\pi - 3.1416| \leq 0.00005.$$

Irratsionaalarvudeks on näiteks $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$, $\pi = 3.14159265359\ldots$, $e = 2.71828182846\ldots$ (naturaallogaritmi alus), $\varphi = 1.61803398875\ldots$ (kuldlõike parameeter), jne.

Kui me vaatleme reaaltelge, siis ei ole lihtne öelda, kas igat punkti reaalteljel saab esitada ratsionaalarvuna (ilmselt ei saa). Samas, intuitiivselt võib arvata, et igat reaalteljel asuvat punkti võib kuitahes täpselt lähendada ratsionaalarvudega. Omadus, mida igapäevaselt kasutavad elektronarvutid, näiteks $\pi \notin \mathbb{Q}$ arvutamiseks saab teoreetiliselt kasutada rida:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Arvuhulkade vahel valitseb seos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}.$$

Definitsioon 1.4

Kõik ratsionaal- ja irratsionaalarvud moodustavad reaalarvude hulga. Kõigi reaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathbb{R}$.

Reaalarvude hulga (reaaltelje) kirja panekuks kasutatakse kirjutusviisi

$$\mathbb{R} = \{\, x : \ -\infty < x < \infty \} \quad \text{või} \quad \mathbb{R} = (-\infty, \infty).$$

Siinjuures $\pm\infty$ ei ole reaalarvud ega asetse kuskil reaalteljel, vaid on matemaatikas abivahendina kaasatud lõpmatuse sümbolid (nn. tõkestamata, väärtust mitte omavad „arvud“). Sümboli ∞ kasutuselevõtt pannakse inglise matemaatiku John Wallis'e (1616-1703) arvele.

Iga lõplikku kümnendmurdu $a = \alpha, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ (näiteks 8.765210448) saab esitada lõpmatu kümnendmurruna kahel erineval viisil:

$$a = \alpha, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 00 \ldots \quad \text{või} \quad a = \alpha, \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_n - 1)99 \ldots.$$

Märkus 1.1

Edaspidi välistame kümnendmurru esitamise kujul, mis lõpeb numbriga 9 perioodis. See eeldus võimaldab hõlpsamini defineerida reaalarvude võrdlemise eeskirjad. Seega reaalarvudeks nimetame kõiki lõpmatuid kümnendmurde, mis ei lõpe numbriga 9 perioodis.

Reaalarvude võrdlemine. Reaalarve $a = \alpha, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ ja $b = \beta, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$ nimetame võrdseteks, kui

$$\alpha = \beta, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \beta_n, \quad \ldots.$$

Reaalarvude võrdlus käib sisuliselt "komakohtade" järgi.

Ütleme, et reaalarv a on suurem kui reaalarv b (ehk b on väiksem kui a), kui $\alpha > \beta$ või leidub indeks $k \geq 1$, nii et

$$\alpha = \beta, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \quad \alpha_k > \beta_k.$$

Reaalarv a on määratud, kui on teada eeskiri tema täiskoha ja iga kümnendkoha leidmiseks. Praktikas kasutatakse irratsionaalarvude asemel nende ratsionaalarvulisi lähendeid. Näiteks, igat reaalarvu $x \in \mathbb{R}$ saab esitada üheselt ahelmurruna (selle teemaga me lähemalt ei tegele)

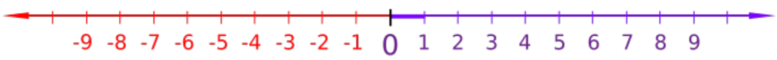
$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}, \tag{1.1}$$

kus a_0 on mingi täisarv ja a_k $(k \geq 1)$ on positiivsed täisarvud. Ligikaudseks arvutamiseks võib kasutada "piisavalt" pikka ahelat.

Märkus 1.2

Reaalarve kujutatakse arvsirge punktidena. Arvsirge punktide hulga ja reaalarvude hulga vahel on üks-ühene vastavus: igale reaalarvule a vastab parajasti üks punkt A arvsirgel (reaalarvu a kujutis), igale punktile A arvsirgel vastab parajasti üks reaalarv a (punkti A koordinaat). Seetõttu kasutame "reaalarv a" asemel ka väljendit "punkt a".

Vastaku reaalarvule a arvsirge punkt A ja reaalarvule b arvsirge punkt B. Siis arv $|a - b|$ on võrdne punktide A ja B vahelise kaugusega. Erijuhul $b = 0$, saame, et $|a|$ on punkti A kaugus nullpunktist.



Reaalarvu absoluutväärtus. Reaalarvu a absoluutväärtus $|a|$ defineeritakse järgmiselt:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Pea meeles, et iga reaalarvu $a \in \mathbb{R}$ korral kehtib

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Näiteks, $\sqrt{25} = 5$ ja mitte -5, kuna juurimine kui funktsioon on defineeritud alati üheselt mittenegatiivse arvuna. Seda ei tohi segamini ajada võrrandi lahendamisega. Võrrandil võib olla rohkem kui üks lahend, näiteks $x^2 = 25$ lahenditeks on $x_1 = 5$ ja $x_2 = -5$.

Absoluutväärtuse tähtsamad omadused:

1. $|a| \geq 0$;
2. $|-a| = |a|$;
3. $\pm a \leq |a|$;
4. $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$;
5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$

1.2 Kompleksarvud

„*Elu on kompleksne. Tal on olemas reaalne ja imaginaarne osa...*“

Definitsioon 1.5

Kompleksarvuks nimetatakse avaldist

$$z = a + b \cdot i, \tag{1.3}$$

kus a ja b on reaalarvud ning i on niinimetatud imaginaarühik, millel on omadus $i^2 = -1$.

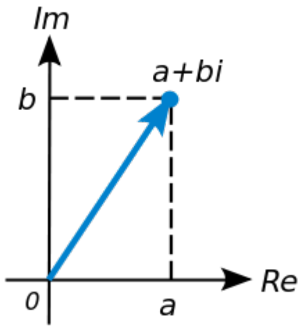
Kompleksarvuks on näiteks $z = 5 + 8\,i$.

Definitsioon 1.6

Seejuures nimetatakse arvu a kompleksarvu $z = a + b\,i$ reaalosaks ($a = Re(z)$), arvu b kompleksarvu z imaginaarosaks ($b = Im(z)$). Kõigi kompleksarvude hulk tähistatakse sümboliga $\mathbb{C}$.

Märgime, et elektroonikas kasutatakse tihti i asemel tähist j, kuna i on seal voolutugevuse tähistamiseks.

Kõige lihtsam on kompleksarvu ette kujutada geomeetriliselt. Meil on reaaltelg ja sellega risti olev imaginaartelg ning iga kompleksarvu jaoks peame kasutama kahte parameetrit a ja b (punkti z koordinaati (a, b)), kus a on võetud reaalteljelt ja b imaginaarteljelt.



Ebakorrektne on kirjutada ilma selgituseta $i = \sqrt{-1}$, kuna avaldisel $\sqrt{-1}$ on olemas kaks erinevat juurt: i ja $-i$ (s.t. $i^2 = -1$ ja $(-i)^2 = -1$). Probleem on selles, et juurimise tehe ei ole kompleksarvude jaoks üheselt defineeritud. Tõsi, kirjutusviis $\sqrt{-1}$ on laialt levinud (osalt ajaloolistel põhjustel, kuna enne sümboli i kasutuselevõttu kirjutati lihtsalt $\sqrt{-1}$). Veidi täpsem on kõnelda "omadusest" $i^2 = -1$.

1.3 Kompleksarvu algebraline kuju

Definitsioon 1.7

Kompleksarvu z esitusviisi $z = a + b\,i$ nimetatakse kompleksarvu z algebraliseks (ka Descartes'i) kujuks.

Kompleksarvudel on mitmeid erinevaid esitusviise, mida vaatleme lähemalt järgmistes loengutes.

Definitsioon 1.8

Kompleksarvu $z = a + b\,i$ mooduliks nimetatakse reaalarvu $|z|$, mis leitakse järgmise seosega:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1.4}$$

Kompleksarvu $3 + 4 \cdot i$ moodul on $|3 + 4 \cdot i| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Seega leitakse moodul Pythagoras'e teoreemi abil.

Moodul $|z| \geq 0$ on reaalarv ja see kujutab endast komplekstasandil asuva punkti (a, b) kaugust nullpunktist.

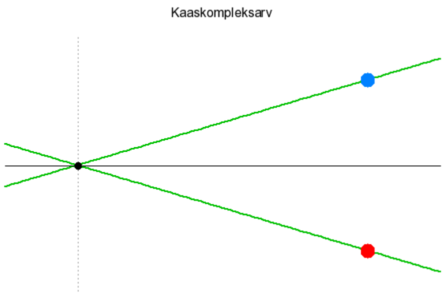
Definitsioon 1.9

Kompleksarvu $z = a + b\,i$ kaaskompleksarvuks (kaaskompleksiks) nimetatakse kompleksarvu

$$\bar{z} = a - b\,i. \tag{1.5}$$

Kompleksarvu $3 + 4 \cdot i$ kaaskompleks on $3 - 4 \cdot i$.

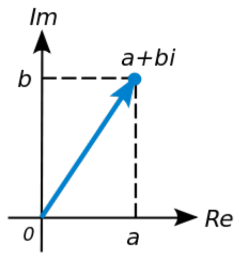
Kaaskompleksarv $\bar{z}$ asub arvuga z nullpunktist võrdsel kaugusel ning z ja $\bar{z}$ on sümmeetrilised reaaltelje suhtes.



On kerge kontrollida, et $|z| = |\bar{z}|$ ja $z \cdot \bar{z} = (a + b\,i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

1.4 Kompleksarvu geomeetriline kuju

Igale kompleksarvule $z = a + b\,i$ vastab üks-üheselt reaalarvude järjestatud paar (a, b), millele omakorda vastab üks-üheselt xy-tasandi punkt $A = (a, b)$. Seega võime kõiki kompleksarve kujutada punktidena koordinaattasandil. Sellist tasandit nimetatakse komplekstasandiks ehk ka Argand'i tasandiks ja joonist selle peal Argand'i diagrammiks.



Punkti A (ka tema kohavektorit **OA**) nimetatakse kompleksarvu $z = a + b\,i$ geomeetriliseks kujutiseks. Seejuures x-telge nimetatakse reaalteljeks ning y-telge nimetatakse imaginaarteljeks.

Jean-Robert Argand (1768 - 1822) oli Šveitsis sündinud prantsuse amatöörmatemaatik.

Märkus 1.3

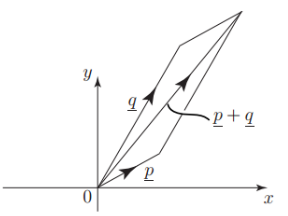
Imaginaarühikule i vastab reaalarvude paar $(0, 1)$ (üks-ühene vastavus). Sel juhul avaldis $i^2 = -1$ oleks kirja pandav kujul $(0, 1)^2 = (-1, 0)$.

1.5 Tehted kompleksarvudega

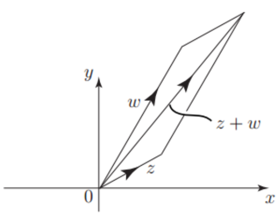
Olgu antud kompleksarvud $z_1 = a_1 + b_1\,i$ ja $z_2 = a_2 + b_2\,i$. Siis nende võrdus, summa, vahe, korrutis ja jagatis defineeritakse järgnevalt:

1. $z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 = b_2$;
2. $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\,i$;
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i$;
4. $\dfrac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2} = z_1 \cdot \dfrac{\bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Kompleksarvude liitmine on analoogiline vektorite liitmisega. Korrutamine algebralisel kujul on tavaline algebraliste avaldiste korrutamine, millel on geomeetriliselt päris huvitav ja lihtne omadus (vaatleme seda hiljem, trigonomeetrilise esituse juures). Jagamine defineeritakse korrutamise kaudu.



vector addition



complex addition

Märkus 1.4

Osutub, et kõigi nende tehete suhtes käitub kompleksarv $z = a + 0\,i$ nagu reaalarv a. Seetõttu võime need arvud omavahel samastada, s.t. $a = a + 0\,i$. Sel viisil saame, et $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Kompleksarve kujul $z = b\,i$ nimetatakse imaginaararvudeks ($a = 0$).

Näide 1.2 Leida $z_1 \pm z_2$, $z_1 \cdot z_2$ ja $\frac{z_1}{z_2}$, kui

$$z_1 = 3 + 5\,i, \quad z_2 = 4 - i.$$

Kirjutame

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (3+4) + (5-1)\,i = 7 + 4\,i,\\
z_1 - z_2 &= (3-4) + (5+1)\,i = -1 + 6\,i,\\
z_1 \cdot z_2 &= (3+5\,i)\cdot(4-i) = (12-(-5)) + (-3+20)\,i = 17 + 17\,i,\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3+5\,i}{4-i}\cdot\frac{4+i}{4+i} = \frac{(3+5\,i)\cdot(4+i)}{|4-i|^2} = \frac{(12-5)+(3+20)\,i}{16+1}\\
&= \frac{7}{17} + \frac{23}{17}\,i.
\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Leida ise $u \cdot v$ ja $\frac{u}{v}$, kui

$$u = 6 + 3\,i,\ v = 4 - 2\,i.$$

Millised vead võiksid olla järgmistes vastustes?

☠ Reaalarv on kõikide arvude hulk.

☠ Reaalarv on arv, mis ei koosne murdudest, ega ka muudest lisanditest, vaid on lihtsalt arv.

☠ Kompleksarv on arv, mis koosneb reaalosast ja imaginaarosast.

☠ Kompleksarv on reaalarvu ja imaginaarühikuga määratud punkt.

☠ Ratsionaalarvude hulka kuuluvad naturaalarvud ja neil on täpne väärtus.

Ülesanne 1.1

Kus (ja kas üldse) tehakse viga järgmises arutluses?

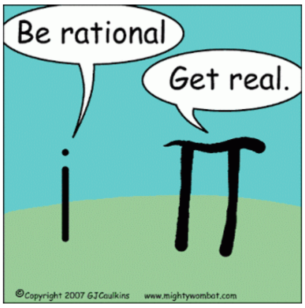
Kirjutame võrdused

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{1}\sqrt{1} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \quad\Rightarrow\quad 1 = -1.$$

1.6 Kompleksarvude ajaloost *

Imaginaararvud viitavad millelegi, mida saab vaid ette kujutada ja mida ei ole reaalselt olemas. Teisalt, reaalarvud viitaksid millelegi, mis on reaalselt olemas. Ometigi on selline lähenemine pisut kahtlane. Võtame näiteks irratsionaalarvu $\sqrt{2}$, mis on ühtlasi reaalarv ja mis valmistas kunagi kreeklastele palju peavalu. Kas te suudaksite leida selle arvu täiesti täpse väärtuse (aga arvuti abiga)? Kas te näete looduses midagi, mille täpne väärtus on $\sqrt{2}$? Ruudu 1×1 diagonaali pikkus? Seda nüüd küll, aga vaevalt looduses ideaalset ruutu leidub ... Seega on $\sqrt{2}$ pigem matemaatiline abstraktsioon.



Samasugune abstraktsioon on imaginaarühik i, mida saab kasutada piisavalt reaalselt, võttes appi tasandi ja kujutades arvu i vastavale imaginaarteljele (punkt $(0, 1)$).

Nii arvul $\sqrt{2}$ kui imaginaarühikul i on olemas lihtne (matemaatiline) geomeetriline seos, kuid reaalsusega tundub mõlemal juhul vähe ühist olevat. Osutub, et tihti on nendest “abstraktsetest” arvudest palju abi ka reaalelus leiduvate suuruste arvutamisel. Kompleksarvude abil saab palju mugavamalt kirjeldada elektri- ja magnetvälja, elektromagnetlaineid jne.

Üks vanemaid viiteid imaginaararvust pärineb kreeka matemaatikult Aleksandria Heron’ilt (u. 10-70, 1. sajand), kus ühe püramiidi tükiga seotud ruumalaks on märgitud ruutjuur negatiivsest arvust $\sqrt{81-144}$ ning kus ajastut arvestades muudeti ruutjuure all olev avaldis lihtsalt positiivseks.

Imaginaararvudega hakati tõsisemalt tegelema 16. sajandi Euroopas, enamasti Itaalias. Kummalisel kombel kerkisid imaginaararvud esmalt esile mitte ruutvõrranditest (nagu võiks eeldada), vaid kuupvõrranditega seotud probleemidest. Imaginaararve ei võetud teadlaste poolt sugugi rõõmuga vastu, vaid neist üritati vabaneda, ignoreerida, nende vastu võidelda. Itaalia matemaatikud Niccolo Fontana Tartaglia (1499/1500 - 1557) ja Gerolamo Cardano (1501 - 1576) uurisid erikujulise kuupvõrrandi

$$a\,x^3 + b\,x + c = 0$$

lahendamist ja peagi jõuti järeldusele, et ei ole võimalik vältida ruutjuurt negatiivsest arvust. Kuupvõrrandi lahendivalemite esmaavastaja tiitli ümber valitseb korralik segadus. Cardano olevat valemid teada saanud Tartaglia käest, kes pani Cardano’le südamele neid mitte avaldada. Hiljem Cardano need siiski oma nime all avaldas (”Ars Magna” ehk Suur Kunst on ajaloos oluline raamat, 1545) ja pälvis sellega suuri sekeldusi Tartaglia ja kohtu näol. Loosse lisasid vürtsi ka nende õpilased ja kes täpselt avastas ühe ja kes teise asja, on suuresti teadmata.

Kuupvõrrandi lahendivalemitest oli näha, et teatud juhtudel tulevad lahenditesse ruutjuure väärtused negatiivsest arvust. 1572. aastal avaldas itaalia matemaatik Rafael Bombelli (1526 - 1572) soode kuivatamise kõrvalt raamatu “L’Algebra”, kus ta tutvustas ühte huvitavat nähtust. Vaatleme näiteks võrrandit

$$x^3 - 15\,x - 4 = 0.$$

Kasutades lahendivalemeid, saab välja kirjutada

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Kui me hetkeks ignoreeriksime, mis täpsemalt $\sqrt{-121}$ on ja kirjutame $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$ ja $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$, siis

$$x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4.$$

Gerolamo Cardano
(Allikas: Wikipedia)

Cardano oli arstiharidusega mängusõltlane, kelle elus vaheldusid tõusud ja mõõnad üsna trastilisel kombel. Cardano ema üritas juba enne sündi temast korduvalt vabaneda abordi abil. Sündides oli Cardano tervislik olukord väga vilets, hiljem laastas piirkonda muhkkatk, kuid sellest hoolimata elas Cardano 75 aastaseks!

Samuti ei vedanud Cardano’l poegadega. Giovanni poodi oma naise mürgitamise eest, noorem poeg Aldo töötas inkvisatsiooni juures vabatahtliku piinajana. Hiljem, kohtuvaidluses Tartaglia’ga, aitas noorem poeg tunnistada isa vastu. Õli valas tulle ka asjaolu, et Cardano tegeles horoskoopide koostamisega ja sai hakkama ka Jeesus Kristuse omaga. Viimane muidugi kirikule ei meeldinud ja Cardano sai maitsta ka öömaja vanglamüüride vahel.

Cardano ise alustas elu vaesena. Olles sunnitud elatist ka hasartmängude abil hankima, langes ta kiirelt mängurluse lõksu. Oli hetki, kus ta mängis maha kogu oma perekonna varanduse. Siiski, Cardano’l oli annet taibata juhuslikkuse ja tõenäosuse rolli ning see aitas tal kohati ka korralikult teenida. Hiljem kirjutas ta raamatu õnnemängudest. Helgemad ajad pakkusid Cardano’le Padua Ülikooli rektori kohta, peapiiskopi astmast terveks ravimise eest kopsakat rahasummat ja näiteks pensioni paavst Gregory XIII enda käest.

Meie näeme ja seda nägi ka Bombelli, et mõnikord taanduvad ruutjuured negatiivsest arvust lihtsalt välja ning tulemuseks on reaalarv - meie otsitav võrrandi lahend. Alates sellest hetkest hakkasid seni üksnes segadust ja tüli tekitanud arvud äratama laiemat huvi kompleksarvude vastu. Seni mõttetuna tundunud objektid muutusid abivahenditeks, mille abil saab jõuda võrrandi lahendi leidmiseni. Lahendamata jäi veel küsimus kompleksarvude olemuse kohta. On need siis mingid arvud või mingi anomaalia või miski muu.

Gottfried Leibniz ütles imaginaararvude kohta järgmist: "A wonderful flight of God's spirit; they are almost an amphibian between being and not being."

1673. aastal soovitas inglise matemaatik John Wallis (1616-1703) suhtuda kompleksarvudesse kui punktidesse tasandil (analoogiliselt reaalarvudega reaalteljel). Ta naerdi välja ja kritiseeriti selle idee eest päris tugevalt. Sajand hiljem soovitas Argand pea sama ideed ning väljanaermisest oli siis asi juba väga kaugel. Šveitsi matemaatik Leonhard Euler (1707 - 1783) võttis $\sqrt{-1}$ tähistamiseks kasutusele tähe i (ladina sõna *imaginarius* esimene täht). William Rowan Hamilton (1805 - 1865) soovitas kompleksarvu $z = a + b\,i$ vaadelda kui lihtsalt reaalarvude järjestatud paari (a, b). Viimane soovitus aga jäi tähelepanuta selles mõttes, et Euler'i poolt kasutusele võetud sümbolist i ei tahtnud ühtäkki enam keegi loobuda. Kui juba sellised suurmehed nagu Euler, Gauss, Leibniz hakkasid tegelema kompleksarvudega, siis oli vastav matemaatiline teooria kiirelt tulema ja valmima. Üsna kiirelt leiti kompleksarvudele rakendus siin ja seal ning lõpuks vaat et igal pool.

1.7 Kompleksarvude kasutamisest *

Mõne keerulisema näite toome järgmistes loengutes. Siin vaatleme vaid mõningaid lihtsamaid ideid.

Võrrand $x^2 + 1 = 0$ ei ole lahenduv reaalarvude hulgal, kuid kompleksarvude seas on lahendid olemas: i ja $-i$.

- Kompleksarvud lubavad vaadata matemaatilisi võrrandeid, mis ei ole lahenduvad reaalarvude hulgal. Näiteks, $x^2 + 1 = 0$. Teisisõnu, kompleksarvude abil on lahend olemas kõikidel algebralistel võrranditel. Viimane lubab lahendusalgoritme kasutada universaalselt, muretsemata lahendi olemasolu või mitte olemasolu küsimuste üle.

- Kompleksarve kasutatakse sageli praktikas info salvestamiseks kahemõõtmeliste objektide kohta. Näiteks graafiku punkti (x, y) saab esitada kui kompleksarvu z esitusega $z = x + y\,i$. Nii võiksime esitada koos ka mistahes kahe erineva hulga elemente, näiteks koerte hulga Y ja kasside hulga X korral võiksime liita ja lahutada kasse-koeri kartmata nende segamini ajamist või näiteks kui kehal on kaks eraldiseisvat omadust laius-kõrgus või lainepikkus-võnkesagedus jne.

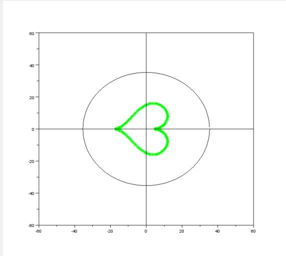
  Kompleksarvude eeliseks teiste kahemõõtmeliste objektide ees on asjaolu, et paljudes programmeerimiskeeltes on kompleksarvude struktuur ja tehted süsteemisiseselt juba olemas ning see lihtsustab kahemõõtmeliste objektidega opereerimist, ilma et peaks hakkama iga kord uuesti vastavaid struktuure ja tehteid defineerima hakkama.

Iseenesest ei ole see ainuke viis. Sama hästi võiks kasutada näiteks vektorit koordinaatidega $\vec{u} = (x, y)$, polaarkoordinaate (r, φ) (nurk φ ja kaugus r), funktsiooni parameetrilist kuju, $x = r\,cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, kahemuutujafunktsioone, info salvestamist kahte erinevat tüüpi muutujasse või mingit muud vastavat matemaatilist objekti.

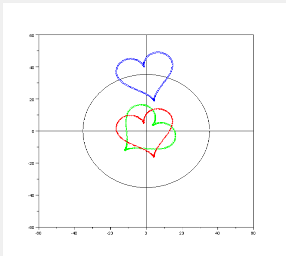
Näiteks, 3 kassi ja 5 koera võiksime märkida arvuna $u = 3 + 5\,i$, 8 kassi ja üks koer arvuna $v = 8 + i$. Kasside ja koerte eraldi liitmise asemel saame opereerida arvudega u ja v kartmata koerte ja kasside arvestuse segamini minekut, $u + v = 11 + 6\,i$.

- Kompleksarvude üks kasulikke omadusi peitub võimaluses esitada tasandilisi vekoreid kompleksarvudena ja pöörata neid vektoreid väga lihtsate tehete abil. Viimane lubab oluliselt lihtsustada matemaatilist aparatuuri, mida on vaja mõningate füüsikas ette tulevate nähtuste uurimiseks. Kahe komleksarvu korrutamisel saadakse uus kompleksarv, mille argument φ (vektori nurk reaaltelje positiivse suunaga) on lihtsalt selle kahe kompleksarvu argumentide summa $\varphi_1 + \varphi_2$. Viimane omadus on aga kasulik näiteks vahelduvvoolu korral, kus erinevad faasid summeeruvad, kompleksarvu kaugusest nullpunktist saame aga infot voolutugevuse, pinge või takistuse kohta.

- Kompleksarvud on väga tõhus vahend kirjeldamaks võnkumisi (amplituudi saab siduda mooduliga $|z|$ ning vektoriga seotud nurka φ on võimalik siduda sagedusega, faasiga, faasinihkega vms). Kui veel arvestada, et looduses leidub väga palju võnkumisi (helilained, raadiolained, elementaarosakeste levimine, elektrivool, perioodilised protsessid looduses jne), siis võib vähemalt aimata, kuidas kompleksarvud saavad meile kasulikud olla.



Südame pööramiseks ja liigutamiseks tasandil tuleks südame punktide koordinaadid esiteks salvestada kompleksarvudena ühte vektorisse. Pööramiseks tuleb vastavat vektorit korrutada teatud kompleksarvuga ja nii lihtne see ongi. Lähemalt vaatleme seda järgmises loengus.

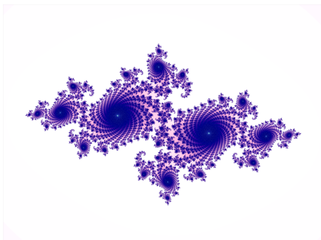


1.8 Fraktalid *

Kompleksarvudega käib kaasas midagi täiesti müstilist ja sõnulseletamatut, nimelt fraktalid ja muinasjutulised mustrid komplekstasandil (tekivad näiteks iteratsioonidest või ligikaudsetest meetoditest). Gaston Maurice Julia (1893 - 1978) oli Jules Henri Poincare (1854 - 1912) õpilane (vt. [2]), kes uuris kujutust

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

kus nii z_n kui c on kompleksarvud. Me saame uurida selle protsessi koondumist, andes ette algväärtused z_0 ja c ning vaadates protsessi edasist kulgu. Kui n-i kasvades $|z_n|$ väärtus tõkestamatult kasvab, siis protsess hajub.

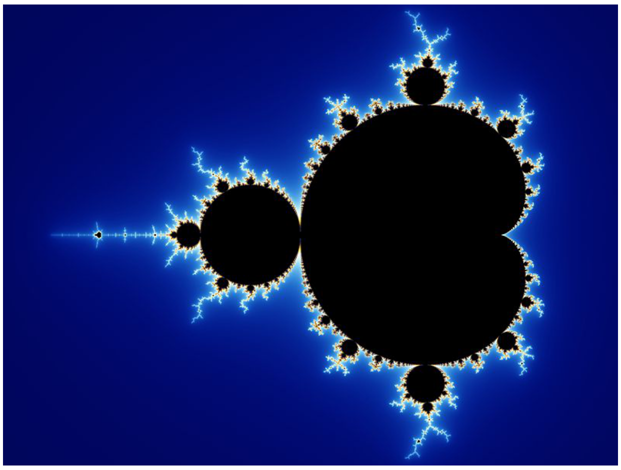


Julia hulgad
(Allikas: Wikipedia)

Kui reaal- ja imaginaarosad jadast z_n lähenevad mingile kindlale arvule, siis protsess koondub. Tihti pakub huvi ka juhtum, kus protsess on lihtsalt tõkestatud (s.t. $|z_n| < M$ mingi reaalarvu $M > 0$ korral). Kandes vastavad punktid z_0 komplekstasandile ja tähistades erineva värviga, kas protsess hajub või koondub teatud iteratsioonide arvu järel, võime saada väga keerulise struktuuriga kujundid: fraktaalse struktuuriga kujundid, mille korral mingi väikese ala suurendamine toob ikka uuesti ja uuesti esiele algse kujundiga sarnased jooned, elemendid või algkujundi enda.

Julia pani oma töö kirja 199 leheküljel, mis avaldati trükis 1918. aastal. Sõltumatult Juliast jõudis analoogiliste tulemusteni ka Pierre Fatou (avaldas tulemused 1919). Julia ja Fatou tööd jäid kauaks ajaks tähelepanuta.

Benoit B. Mandelbrot (1924 - 2010) tutvus Julia töödega onu soovitusel 1945. aastal, kuid tõsisem huvi ilmnes antud teema vastu alles 1970. aastate teises pooles.



Piparkoogimehike (Allikas: Wikipedia)

Mandelbrot'il õnnestus näidata, et Julia hulgad saab koguda üheks keerukaks hulgaks, mida tänapäeval tuntakse Mandelbrot'i hulgana (Piparkoogimehike). Selliseid kauneid jooniseid saab valmistada arvuti abiga, lähtudes mistahes kompleksetest kujutustest. Tulemusi on kasutatud näiteks vaibamustrite koostamiseks, samuti kunstlike maastike loomiseks ulmefilmides.

Kogu see jutt võiks olla ainult ilus matemaatiline teooria, kui kõigel sellel ei oleks ka väga praktilist väärtust. Nimelt, ükskõik kuhu looduses me enda ümber ka ei vaataks, leiame sealt eest fraktaalsed struktuurid (puud, põõsad, pilved, rannajooned, galaktikad), protsessid on tihti kaootilised kuid siiski mingi korrapäraga jne. Näiteks, suurendatud broccoli. Kummalisel kombel on see kõik ka kuidagi seotud kompleksarvudega.

Broccoli (Wikipedia)

Viited

[1] R. Flood, R. Wilson. Kuulsad matemaatikud. Valgus, 2014.

[2] Ü. Lepik. Kaos ja kord. Tartu Ülikooli Kirjastus 1997.

[3] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[4] C. A. Pickover. The Math Book. Sterling, New York, 2009.

[5] V. Soomer. Kõrgem matemaatika (loengukonspekt).

[6] I. Stewart. 17 Equations that Changed the World. Profile Books, 2013.

[7] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.