Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

# 10 Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid ja l'Hospital'i reegel

## Sisukord



**Kontrolltöö teemad**

1. L'Hospital'i reegel ja selle kasutamine piirväärtuste leidmisel (näited 10.5-10.13).

**Eksamiteemad**

1. Lagrange'i keskväärtusteoreem, selle geomeetriline ja füüsikaline sisu.
2. Omaduse tüüpi $\sin(x) \leq x$ tõestamine Lagrange'i keskväärtusteoreemi abil, näited 10.3 ja 10.4.
3. L'Hospital'i reegel ja selle kasutamine piirväärtuste leidmisel.

## 10.1 Abitulemused

Enne põhitulemuste, Cauchy ja Lagrange'i teoreemi, sõnastamist anname mõned tuntud abitulemused.

**Teoreem 10.1**

Weierstrass'i teoreem lõigus pideva funktsiooni ekstremaalsetest väärtustest, vt. [7, 8]. Iga lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon $f$ saavutab maksimaalse ja minimaalse väärtuse antud lõigus.

**Märkus 10.1**

Lõigus $[a, b]$ pideva funktsiooni $f$ korral leiduvad sellised arvud $\alpha, \beta \in [a, b]$, et

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(\alpha), \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(\beta).$$

Paneme tähele, et näiteks vahemikus $(a, b)$ pidev funktsioon $f$ ei pruugi saavutada oma ekstremaalseid väärtusi. Näiteks $f(x) = x$ ei saavuta maksimaalset väärtust vahemikus $(0, 1)$. Kui leiduks selline suurim $\alpha \in (0, 1)$, siis alati $\frac{1+\alpha}{2} \in (0, 1)$ oleks ikkagi veel suurem.

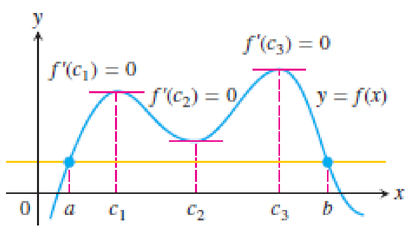
**Teoreem 10.2**

Fermat' teoreem. Kui vahemikus $(a, b)$ diferentseeruval funktsioonil $f$ on ekstremaalne väärtus punktis $\xi \in (a, b)$, siis $f'(\xi) = 0$ (s.t. selles punktis funktsiooni muutumise kiirus on null).

*Tõestus.* Tõestuse leiab õpikust [7]. $\square$

**Teoreem 10.3**

Rolle'i teoreem, vt. [7]. Kui lõigus $[a, b]$ pideva ja vahemikus $(a, b)$ diferentseeruva funktsiooni $f$ korral $f(a) = f(b)$, siis leidub selline punkt $c \in (a, b)$, nii et $f'(c) = 0$.

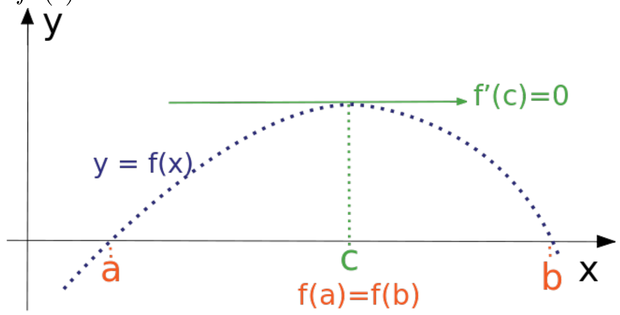



Allikas: [9]

*Tõestus.* Esiteks märgime, et konstantse funktsiooni korral on tulemus ilmne. Edaspidi eeldame, et funktsioon ei ole konstantne, s.t. leidub $x_0 \in (a, b)$ nii, et $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$. Konkreetsuse mõttes olgu $f(x_0) > f(a) = f(b)$. Kuna lõigus pidev funktsioon saavutab ekstremaalsed väärtused lõigus $[a, b]$, siis ka maksimaalse väärtuse $f(\alpha)$, kus $\alpha \in (a, b)$ (juhul $\alpha = a$ või $\alpha = b$ saaksime vastuolu tingimusega $f(\alpha) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$).
Kuna maksimaalne väärtus saavutatakse punktis $\alpha \in (a, b)$, siis Fermat' teoreemi põhjal $f'(\alpha) = 0$. $\square$

**Märkus 10.2**

Olgu funktsioon $y = f(x)$, mis kirjeldab objekti liikumist, tema poolt läbitud teepikkust. Siis Rolle'i teoreem ütleb seda, et kui objekti keskmine kiirus ajaperioodil $[a, b]$ on null, siis leidub ajahetk $c$, mil objekti hetkkiirus $f'(c)$ on null.




Allikas: Wikipedia

Infotehnoloogia tudengitelt küsitakse lihtne küsimus: "Palju on 2 korda 2?"

1. aasta tudeng vastab automaatselt "4".

2. aasta tudeng vastab "4, täpselt", pärast mõningast mõtlemist.

3. aasta tudeng võtab taskust kalkuraatori ja pärast paari nupule vajutamist vastab rõõmsalt "4".

4. aasta tudeng kirjutab vastamise jaoks 100-realise arvutiprogrammi, kompileerib selle ja saab vastuseks "4.0 $E + 00$."

5. aasta tudeng disainib uue programmeerimiskeele, mis sobib ideaalselt just selliste probleemide lahendamiseks. Tudeng kirjutab selles keeles valmis koodijupi ja saab vastuseks "4", kuid lisab, et pole päris kindel, kuna ei tea kas eelmisel õhtul sai ikka viga koodis täielikult parandatud.

Viimase aasta tudeng kurdab meeleheitlikult enne lõpueksamit "Jumal, oh Jumal, miks ma pean peast teadma kõiki neid kuradima konstante?!"

Rolle'i teoreemi idee omistatakse india matemaatikule ja astronoomile Bhaskara II (1114-1185), formaalne tõestus prantsuse matemaatikule Michel Rolle'ile (1652-1719) 1691. aastal.

**Näide 10.1**

Toome ühe lihtsa olukorra, kus Rolle'i teoreem võiks kasulik olla. Näitame, et võrrandil

$$x^3 + 3x - 6 = 0$$

on ainult üks reaalarvuline lahend. Funktsioon $f(x) = x^3 + 3x - 6$ on pidev ja diferentseeruv kogu reaalteljel. Leiame tuletise

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1).$$

Kui meie võrrandil peaks olema kaks reaalarvulist lahendit (punktides $a$ ja $b$), siis peab kehtima $f(a) = f(b) = 0$. Rolle'i teoreemi põhjal peab funktsioonil $f$ leiduma vahemikus $(a, b)$ vähemalt üks punkt $c$, et kehtib $f'(c) = 0$. Kuna $f'(x) = 3(x^2 + 1) > 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks, siis ei ole võimalik võrdus $f'(c) = 0$. Järelikult võrrandil ei saa leiduda rohkem kui ainult üks reaalarvuline lahend.

⋄ ⋄ ⋄

## 10.2 Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid

**Teoreem 10.4**

Lagrange'i keskväärtusteoreem. Kui funktsioon $f$ on pidev lõigus $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikus $(a, b)$, siis leidub selline punkt $c \in (a, b)$, nii et

$$\frac{\mathbf{f(b) - f(a)}}{\mathbf{b - a}} = \mathbf{f'(c)}. \tag{10.1}$$

*Tõestus.* Vaatleme funktsiooni

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Lihtne on leida, et $g(a) = f(a)$ ja $g(b) = f(a)$, s.t. $g(a) = g(b)$. Rolle'i teoreemi põhjal leidub punkt $c \in (a, b)$ nii, et funktsiooni $g$ muutumise kiirus on null, s.t. $g'(c) = 0$.

Kuna funktsioon $f$ on pidev lõigus $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikus $(a, b)$, siis ka funktsioon $g$ kui lineaarne kombinatsioon funktsioonist $f$ on seda. Leiame tuletise

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

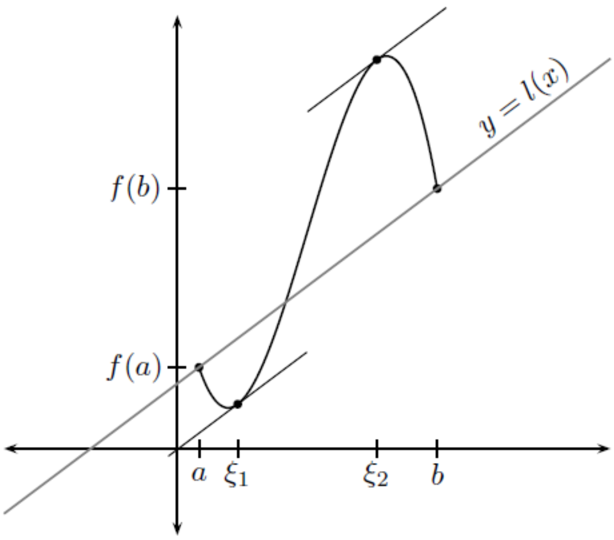
Omadusest $g'(c) = 0$ järeldub, et

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

□

**Märkus 10.3**

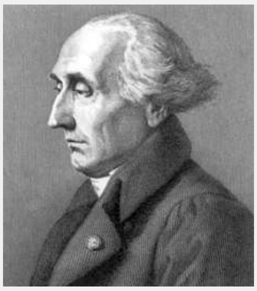
Näidaku funktsioon $y = f(x)$ objekti liikumist, tema teepikkuse muutumist. Lagrange'i teoreem ütleb, et teatud tingimustel leidub selline moment $(x = c)$, mil objekti hetkkiirus $f'(c)$ on võrdne objekti keskmise kiirusega $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ üle lõigu [a,b].




Allikas: [1]

Lagrange'i teoreem on midagi sellist, millega võiks politsei ennast vabalt kohtus kaitsta trahvikiitungite välja kirjutamisel. Kui mõõta keskmist kiirust mingil teelõigul, siis keskmine kiirus üle 90 km/h tähendab, et mingil hetkel pidi ka hetkkiirus reaalselt olema üle 90 km/h (s.t. et ei ole tingimata vaja mõõta hetkkiirust). Kiirust saab mõõta ka kaudselt, lugedes näiteks sisenemise ja väljumise aega kiirteede piletitelt.

Lagrange'i teoreemi erijuhtu kirjeldas esmakordselt india matemaatik ja astronoom Parameshvara (1370-1460). Teoreemi üldistuse andis hiljem prantsuse matemaatik Augustin Louis Cauchy (1789-1857) ning see on üks tähtsamaid teoreetilisi tulemusi matemaatilises analüüsis (selle abiga tõestatakse paljud teised tähtsad tulemused).



Joseph Louis Lagrange. Allikas: Wikipedia

Itaalia matemaatiku ja astronoomi Joseph-Louis Lagrange'i (1736-1813) nimi seostatakse tulemusega tavaliselt Taylor'i valemi jääkliikme Lagrange'i kuju kaudu. Üldiselt on keskväärtusteoreemiga seotud veel teisi nimesid nagu näiteks Andre-Marie Ampere, Ossian Bonnet.

Lagrange'ist sai juba 19-aastaselt Torino kuningliku suurtükiväe kooli matemaatikaprofessor. Aastal 1788 ilmus temalt mehaanikaõpik "Mecanique analytique" (Analüütiline mehaanika), milles ta esitas kehade ja punktmasside liikumisülesandeid diferentsiaalvõrrandite abil.

Viimati nimetatud raamatu eessõnas kirjutas Lagrange "Te ei leia sellest tööst jooniseid. Meetodid, mida ma siin esitan, ei vaja kontstruktsioone ega geomeetrilist või mehaanikalist põhjendamist, vaid ainult algebralisi operatsioone, mille tingivad materjali järjepidev ja ühetaoline esitus.", vt [2].

**Näide 10.2**

Kui funktsiooni kuju on teada, näiteks

$$f(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + x - 2,$$

siis mõnikord on võimalik täpelt leida ka see punkt $c \in (a, b)$, kus funktsiooni muutumise kiirus on võrdne keskmise muutumise kiirusega.

Leiame $c \in (0, 2)$, nii et

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f\,'(c).$$

Kuna $f(2) = 12$, $f(0) = -2$ ja

$$f\,'(c) = 12\,c^2 - 10\,c + 1,$$

siis

$$\frac{12 + 2}{2} = 12\,c^2 - 10\,c + 1 \quad \Rightarrow \quad 12\,c^2 - 10\,c - 6 = 0.$$

Viimase ruutvõrrandi lahenditeks on

$$c = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{97}{144}} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{12}.$$

Vahemikus $(0, 2)$ on ainult üks väärtus, $c = \frac{5+\sqrt{97}}{12} \approx 1.237$.

$\diamond\ \diamond\ \diamond$

**Näide 10.3**

Lagrange'i teoreemi üks levinumaid kasutusi on funktsiooni väärtuste absoluutse vea hindamine. Näitame, et iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrratus

$$|\sin(x) - \sin(y)| \le |x - y|.$$

Kui $x = y$, siis võrratus kehtib. Olgu $x \neq y$. Siinus on pidev ja diferentseeruv kogu reaalteljel. Lagrange'i keskväärtusteoreemi järgi

$$\frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} = (\sin(\xi))\,' = \cos(\xi).$$

Siit

$$\left|\frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y}\right| = |\cos(\xi)| \le 1.$$

Viimane tähendabki, et

$$|\sin(x) - \sin(y)| \le |x - y|.$$

Paneme tähele, et kui $y = 0$ ja $x \ge 0$, siis kehtib võrratus

$$\sin(x) \le x.$$

$\diamond\ \diamond\ \diamond$

**Näide 10.4** Lagrange'i keskväärtusteoreemi abil saab hõlpsasti tõestada praktikas vaja mineva Bernoulli võrratuse:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0.$$

Märgime, et võrratis kehtib $x = 0$ korral. Funktsioon $f(x) = (1+x)^n$ on pidev ja diferentseeruv $x > 0$ korral. Siis Lagrange'i keskväärtusteoreemi abil leidub $\xi \in (0, x)$, et

$$f(x) - f(0) = f'(\xi) \cdot (x - 0) \quad \Rightarrow \quad (1+x)^n - 1 = n \cdot x \cdot (1+\xi)^{n-1} \geq n \cdot x.$$

⋄ ⋄ ⋄

**Teoreem 10.5**

Cauchy keskväärtusteoreem. Kui funktsioonid $f$ ja $g$ on pidevad lõigus $[a, b]$ ja diferentseeruvad vahemikus $(a, b)$ ning $g'(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis leidub selline punkt $c \in (a, b)$, nii et kehtib võrdus

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{10.2}$$

*Tõestus.* Täpse tõestuse võib leida näiteks õpikust [7]. Lagrange'i keskväärtusteoreem on tegelikult järeldus Cauchy teoreemist, võttes $g(x) = x$. Cauchy teoreemi tõestuse idee on sarnane sellele, mille esitasime Lagrange'i keskväärtusteoreemile. □

Augustin Louis Cauchy. Allikas: Wikipedia

Cauchy õppis ehitusinseneriks ja töötas sadama ja kaitserajatiste ehitusel. Üsna varsti valiti ta Pariisi teaduste akadeemia liikmeks ja Cauchy hakkas andma loenguid Pariisi polütehnilises koolis.

Cauchy muutis 1820. aastatel matemaatilise analüüsi valdkonda olulisel määral, formaliseerides piirväärtuse, pidevuse, tuletise ja integraali mõisted. Lisaks lõi ta peaaegu üksinda kompleksmuutuja funktsioonide teooria. Aastal 1821 ilmus teedrajav raamat "Cours d'analyse" (Analüüsi kursus), vt [2].

**Märkus 10.4**

2012. aastal võitis Usain Bolt meeste 100 m jooksus kuldmedali ajaga 9.63. Tema keskmine kiirus võrdus läbitud teepikkus jagatud ajaga:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{100\,m}{9.63\,sek} \approx 10.38\frac{m}{sek} = 37.38\frac{km}{h}.$$

Lagrange'i keskväärtusteoreem ütleb meile, et leidus ajahetk $t_*$, mil Bolt jooksis just nimelt sellise hetkkiirusega $f'(t_*) = 37.38$ km/h. Asafa Powell sai samas jooksus aja 11.99, mis on 1.245 korda aeglasem kui Bolt'il,

$$\frac{\Delta g}{\Delta t} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{100\,m}{11.99\,sek} \approx 8.34\frac{m}{sek} = 30.03\frac{km}{h}.$$

Bolt'i keskmine kiirus oli sama palju, 1.245 korda, kiirem kui Powell'il,

$$\frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{37.38}{30.03} = 1.245.$$

Cauchy keskväärtusteoreem ütleb seda, et leidus selline ajahetk $c$, mil Bolt jooksis just ninelt 1.245 korda kiiremini kui Powell,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}}.$$

## 10.3 L'Hospital'i reegel piirväärtuse arvutamiseks

L'Hospital'i reegel võimaldab tihti väga kergelt leida piirväärtust

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

juhtudel, kus $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$) või $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$ (määramatus tüüpi $\frac{\infty}{\infty}$).

**Teoreem 10.6**

Kui mingis protsessis

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad \text{või} \quad \lim |f(x)| = \lim |g(x)| = \infty$$

ja eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \tag{10.3}$$

siis selles protsessis kehtib võrdus

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{10.4}$$

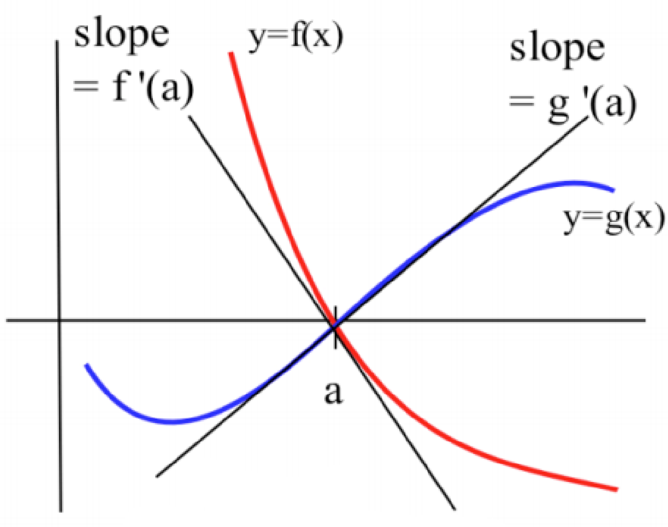
*Tõestus.* Detailsema tõestuse sarnase tulemuse kohta leiab õpikust [7]. Teoreem järeldub Cauchy keskväärtusteoreemist. Skemaatiliselt vaatleme juhtu, kus $f(a) = g(a) = 0$ ja $g'(x) \neq 0$, funktsioonid $f$ ja $g$ on pidevad ja diferentseeruvad kohal $a$. Siis Cauchy keskväärtusteoreemi põhjal leidub punkti $a$ ümbruses $(a, a+\delta)$, $\delta > 0$, selline arv $\xi \in (a, a+\delta)$, et

$$\frac{f(a+\delta) - f(a)}{g(a+\delta) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Kui $f(a) = g(a) = 0$, siis jääb järgi võrdus

$$\frac{f(a+\delta)}{g(a+\delta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ja siit edasi järgneb analüüs minnes piirile $\delta \to 0+$. $\square$



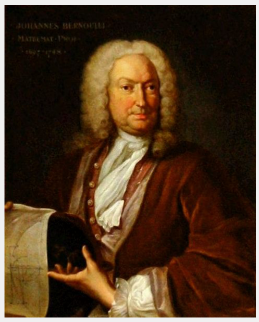

L'Hospital'i reegel $f(a) = g(a) = 0$ korral. Allikas: [4]

L'Hospital'i reegli nimi tuleb prantsuse matemaatiku Guillaume Francois Antoine Marquis de l'Hospital'i (1661-1704) järgi.

Marquis de l'Hospital. Allikas: Wikipedia

Arvatavasti tõestas l'Hospital'i reegli üldsegi šveitsi matemaatik Johann Bernoulli (1667-1748). Markii l'Hospital ise oli Bernoull'i õpilane ja ühtlasi tööandja. Lepingu järgi võis L'Hospital kasutada Bernoulli tulemusi oma nime all. L'Hospital avaldas 1696. aastal maailma esimese trükitud raamatu diferentsiaalarvutuse valdkonnas: "Lõpmata väikeste suuruste analüüs kõverjoonte mõistmiseks", milles oli kasutatud päris mitut Bernoulli ja Leibniz'i tulemust (tõsi, seda mainis eessõnas ka l'Hospital ise).

Naljatledes öeldakse, et l'Hospital'i reegel on parim (kõige kasulikum) teoreem, mida raha eest saab osta.



Johann Bernoulli. Allikas: Wikipedia

Johann Bernoulli oli seejuures ka suurmehe Euler'i õpetaja.

**Näide 10.5**

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 2}\frac{2x}{2x+1} = \frac{4}{5}.$$

◇ ◇ ◇

**Ülesanne.** Leida piirväärtus

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{4x}}{2x}.$$

**Näide 10.6**

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x+x^2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1+2x} = \frac{0}{1} = 0.$$

◇ ◇ ◇

**Ülesanne.** Leida piirväärtus

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}.$$

**Näide 10.7**

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 2}\frac{\frac{7}{1+7x}}{1} = 7.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 10.8**

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 10.9**

L'Hospital'i reegli korral on väga oluline see, et meil oleks jagatis $\frac{f(x)}{g(x)}$. Kui jagatist ei ole, võib selle ise tekitada. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln(x) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{-\infty/\infty}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

◇ ◇ ◇

**Märkus 10.5**

Siinjuures on oluline kontrollida, et meil oleks määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$ või $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, vastasel korral võime saada absurdse tulemuse. Näiteks, kasutades valesti l'Hospital'i reeglit saame

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} \overset{ups!}{=} \lim_{x\to 0}\frac{0}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{2} = 0.$$

Tegelik vastus peab olema aga pluss lõpmatus.

**Näide 10.10**

L'Hospital'i reegel ei ole alati kasutatav. Näiteks, lihtne on näha, et

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{3^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0,$$

kuna $\frac{2}{3}\in(0,1)$. L'Hospital'i reegliga saaksime

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{3^x}\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln(2)}{3^x\ln(3)}\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^2(2)}{3^x\ln^2(3)}\overset{\infty/\infty}{=}\dots.$$

Viimane aga ei ole sugugi lihtsam kui esialgne avaldis.

◇ ◇ ◇

**Näide 10.11**

Märgime, et kuigi piirväärtuse $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ leidumine on väga oluline, siis viimase mitteleidumisel võib algne piirväärtus $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ siiski eksisteerida. Näiteks,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}}\overset{\frac{1-M/\infty}{1+M/\infty}}{=}1.$$

Samas, tuletiste jagatisest

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

piirväärtust aga ei leidu, kuna protsessis $x\to\infty$ on lõpmata palju neid $x$ väärtusi, millal $\cos(x)=0$ või $\cos(x)=1$. Trigonomeetrilistest valemitest saab ka täpsemalt kirjutada

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}=\lim_{x\to\infty}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Tangensi väärtustest protsessis $x\to\infty$ piirväärtust ei leidu.

◇ ◇ ◇

## 10.4 Piirväärtus funktsioonidest $[f(x)]^{g(x)}$

Määramatused $0^0$, $\infty^0$ ja $1^\infty$ tekivad astme-eksponentfunktsiooni

$$y=[f(x)]^{g(x)}$$

piirväärtuse leidmisel ($f(x)>0$). Logaritmi omadustest järeldub võrdus

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}. \tag{10.5}$$

Kuna eksponentfunktsioon $y=e^x$ on pidev oma määramispiirkonnas, siis kehtib seos

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot\ln(f(x))]}. \tag{10.6}$$

**Näide 10.12**

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\infty^0}{=} e^A,$$

kus

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln(x) \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Siit järeldub, et vastus on

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^0 = 1.$$

◇ ◇ ◇

**Ülesanne.** Leida piirväärtus

$$\lim_{x\to 0+} x^x.$$

**Näide 10.13**

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x \overset{1^\infty}{=} e^A,$$

kus

$$A = \lim_{x\to\infty} \left[x \cdot \ln\left(1 + \frac{7}{x}\right)\right] \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{7}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{7}{x}} \cdot \left(-\frac{7}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 7.$$

Siit järeldub, et vastus on

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x = e^7.$$

◇ ◇ ◇

Lõpetuseks toome ühe nalja.

Legendi järgi olevat loogik Bertrand Russell väitnud, et ta suudab tõestada ükskõik mida, kui võtta aluseks võrdus $1 + 1 = 1$.

Ühel päeval küsinud keegi ninatark “Tõestage, et Te olete paavst”. Russell mõtles natukene ja vastas “Mina olen üks ja paavst on üks. Seega, paavst ja mina oleme üks”.

# Viited

[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] R. Flood, R. Wilson. Kuulsad matemaatikud. Valgus, 2014.

[3] J. Grabiner. A Historian Looks Back: The Calculus as Algebra and Selected Writings. MAA, 2010.

[4] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[5] D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, P. F. Lock, D. E. Flath. Applied Calculus. Wiley, 2010.

[6] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.

[7] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[8] V. Soomer. Matemaatiline analüüs. Tartu Riiklik Ülikool, 1988.

[9] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas’ Calculus 11th. Pearson, 2005.