11 Taylor'i valem. Diferentseeruva funktsiooni uurimine ja graafiku koostamine

Sisukord

Kontrolltöö teemad

1. Funktsiooni I ja II tuletise omadused (järgneb täpsem loetelu, mida peaks oskama).
2. Oskama leida, millal funktsioon on kasvav või kahanev.
3. Oskama leida, millal funktsioon on kumer või nõgus.
4. Oskama leida funktsiooni maksimaalseid ja minimaalseid väärtusi.
5. Teadma, mis on funktsiooni graafiku käänupunkt ja kuidas seda leida.

Eksamiteemad

1. Taylor'i valem ja selle rakendamine ligikaudsel arvutamisel (näide 11.1).
2. Taylor'i valemi jääkliikme Lagrange'i kuju (näide 11.2).
3. Maclaurin'i valem.
4. Funktsiooni I ja II tuletise omadused (Teoreemid 11.3 ja 11.4. Definitsioonides 11.3 - 11.7 olevad mõisted).

11.1 Sissejuhatus

Kas te olete kunagi mõelnud, kuidas arvutada väärtust $\sin(37.8°)$ või näiteks $\ln(12.678)$? Tõsi, te võite võtta kätte taskukalkulaatori või oma arvuti ja lasta tal arvutada, kuid sel juhul, mis moodi tema seda teeb? Millise eeskirja järgi neid väärtusi arvutatakse? Me oskame arve liita, lahutada. Me oskame neid näiteks korrutada. Seega $x^3 - 2x$ arvutame näiteks kui $x \cdot x \cdot x - 2 \cdot x$. Võime tõdeda, et oskame arvutada mistahes polünoomi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

väärtust kohal x. Osutub, et keerulisemad funktsioonid annab teatavatel tingimustel samuti arvutada kuitahes täpselt polünoomide kaudu. Näiteks eksponentfunktsiooni e^x võib kirjutada kui

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_4(x),$$

kus $R_4(x)$ on teatav jääkliige, mis on samuti x-st sõltuv funktsioon. Jättes jääkliikme ära, saame ligikaudse võrduse

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

Viimast on juba lihtne ise arvutada või siis arvuti jaoks "programmeerida".

Käesolev peatüki materjal pärineb suuresti õpikust [8].

11.2 Taylor'i valem

Vaatleme funktsiooni f, mis on $(n+1)$ korda diferentseeruv punkti a mingis ümbruses $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$. Moodustame polünoomi

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k \tag{11.1}$$

või siis pikalt välja kirjutades

$$P_n(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n. \tag{11.2}$$

$k!$ on faktoriaal, mis leitakse seosega

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k.$$

Siinjuures $0! := 1$.

Definitsioon 11.1

Polünoomi

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k \tag{11.3}$$

nimetatakse funktsiooni f n-astme Taylor'i polünoomiks P_n kohal a.

Nali. Mis on inseneride matemaatiline alusprintsiip?

Igal funktsioonil on olemas Taylor'i rida, mis sisaldab vaid lineaarset liiget.

Siin $P_n(x)$ on muutuja x suhtes n-astme polünoom, mis on arendatud $(x-a)$ astmete järgi. Kerge on kontrollida, et kehtivad seosed

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n{}'(a) = f'(a), \quad \ldots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Tähistame erinevuse $f(x) - P_n(x)$ sümboliga $\alpha_n(x)$, millest

$$f(x) = P_n(x) + \alpha_n(x). \tag{11.4}$$

Definitsioon 11.2

Valemit (11.4),

$$f(x) = P_n(x) + \alpha_n(x), \tag{11.5}$$

nimetatakse funktsiooni f Taylor'i valemiks, funktsiooni α_n aga Taylor'i valemi jääkliikmeks. Jääkliige $\alpha_n(x)$ näitab, kui suure vea me teeme, kui asendame funktsiooni $y = f(x)$ tema Taylor'i polünoomiga $y = P_n(x)$.

Järgnev lõik pärineb ümberjutustusena raamatust [2]. 1919. aastal Odessas füüsika professorina töötanud Igor Tamm (Nobeli laureaat 1958) jutustas järgmise loo.

Kuskil 1919. a. paiku jõudis ta Odessa lähedale punaste poolt okupeeritud külla. Tamm üritas välja selgitada, mitu kana ta saaks vahetada oma tosina hõbelusika vastu. Ta arreteeriti ühe Makhno (punastest eraldi võidelnud väepealik) salga liikme poolt.

Tamm viidi atamani juurde. Viimane oli habetunud ja kandis pikka karusnahkset mütsi, ümber keha oli seotud automaadi lindid koos paari käsigranaadiga. Ataman süüdistam Tamme kommunistlikus agitatsioonis, Emakese Ukraina rüvetamises ja nõudis surmanuhtlust. Tamm selgitas, et ta on kõigest Odessa Ülikooli professor ja tuli külasse toitu ostma. "Jama!" öelnud ataman: "Mis sorti professor sa õige oled?" Tamm vastanud alandlikult, et ta õpetab matemaatikat.

"Matemaatikat?" imestanud ataman ja küsinud: "Siis peaksid sa oskama n-liikmelise Maclaurin'i rea jääkliiget hinnata." Väriseva käega koostas Tamm püssitoru ees õige vastuse ja tal lasti minna. Senini ei ole teada, kes oli ataman, kellel olid teadmised ka kõrgemas matemaatikas.

Teoreem 11.1

Kui funktsioon f on punkti a mingis ümbruses $(n+1)$ korda diferentseeruv, siis kehtib funktsiooni f Taylor'i valem jääkliikmega Lagrange'i kujul:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k + \alpha_n(x), \tag{11.6}$$

kus

$$\alpha_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a, x). \tag{11.7}$$

Tõestus. Näitame, et tehtud eeldustel funktsiooni f kohta kehtib seos $\alpha_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$, kui $x \to a$ ja avaldame $\alpha_n(x)$ tuletise $f^{(n+1)}(x)$ kaudu. Seosest (11.4) järeldub, et funktsioonid $\alpha_n(x), \alpha'_n(x), \ldots, \alpha_n^{(n)}(x)$ on diferentseeruvad punkti a ümbruses ning

$$\alpha_n(a) = 0, \quad {\alpha_n}'(a) = 0, \quad \ldots \quad \alpha_n^{(n)}(a) = 0.$$

Olgu

$$\varphi_n(x) = (x-a)^{n+1},$$

siis ilmselt ka

$$\varphi_n(a) = 0, \quad {\varphi_n}'(a) = 0, \quad \ldots \quad \varphi_n^{(n)}(a) = 0.$$

Kerge on veenduda, et fuktsioonid $\alpha_n, \alpha'_n, \ldots, \alpha_n^{(n)}$ ning $\varphi_n, \varphi'_n, \ldots, \varphi_n^{(n)}$ täidavad Cauchy keskväärtusteoreemi eeldusi igal lõigul punkti a ümbruses $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$. Seetõttu võime kirjutada

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n(x)}{\varphi_n(x)} &= \frac{\alpha_n(x) - \alpha_n(a)}{\varphi_n(x) - \varphi_n(a)} = \frac{{\alpha_n}'(x_1)}{{\varphi_n}'(x_1)} = \frac{{\alpha_n}'(x_1) - {\alpha_n}'(a)}{{\varphi_n}'(x_1) - {\varphi_n}'(a)} \\ &= \frac{{\alpha_n}''(x_2)}{{\varphi_n}''(x_2)} = \cdots = \frac{\alpha_n^{(n)}(x_n)}{\varphi_n^{(n)}(x_n)} = \frac{\alpha_n^{(n)}(x_n) - \alpha_n^{(n)}(a)}{\varphi_n^{(n)}(x_n) - \varphi_n^{(n)}(a)} = \frac{\alpha_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{\varphi_n^{(n+1)}(x_{n+1})} \end{aligned},$$

kus x_1 asub vahemikus otspunktidega a ja x, x_2 asub vahemikus otspunktidega a ja x_1 jne. Kuna $\varphi_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ ja

$$\alpha_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 = f^{(n+1)}(x),$$

siis tähistades $\xi = x_{n+1}$, võime kirjutada

$$\frac{\alpha_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{\alpha_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi_n^{(n+1)}(\xi)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

millest saame seose

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-a)^{n+1},$$

kus ξ on mingi punkt vahemikust otspunktidega a ja x. Viimasest seosest on näha, et tehtud eeldustel tõepoolest $\alpha_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$, kui $x \to a$.

□

Märkus 11.1

Taylor'i valemi juures mõtleme kirjutise $\xi \in (a, x)$ all seda, et ξ kuulub vahemikku otspunktidega a ja x, seega $\xi \in (a, x)$ või $\xi \in (x, a)$. Lühiduse mõttes kirjutame neist vaid ühe.

Märkus 11.2

Erijuhul $a = 0$ saame Maclaurin'i valemi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(0) \cdot x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x). \tag{11.8}$$

Näide 11.1 Leiame funktsiooni $f(x) = \sin(x)$ Taylor'i valemi punktis $a = 0$ (Maclaurin'i valem). Kirjutame tuletised

$$f'(x) = \cos(x),\ f''(x) = -\sin(x),\ f'''(x) = -\cos(x),\ \ldots,$$

millest

$$\begin{aligned} f'(0) &= \cos(0) = 1, \quad f''(0) = -\sin(0) = 0, \quad f'''(0) = -\cos(0) = -1, \\ f^{(4)}(0) &= \sin(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1, \quad \ldots . \end{aligned}$$

Valemi (11.8) põhjal

$$\sin(x) = \sin(0) + (\sin(0))' \cdot x + \frac{(\sin(0))''}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{(\sin(0))^{(n)}}{n!} \cdot x^n + \alpha_n(x),$$

kus

$$\alpha_n(x) = \frac{(\sin(\xi))^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x).$$

Seega võime siinust arvutada valemi

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \cdots + \frac{(\sin(0))^{(n)}}{n!} \cdot x^n + \alpha_n(x).$$

abil.

Brook Taylor (1685 - 1731) oli inglise matemaatik.

Brook Taylor. Allikas: Wikipedia

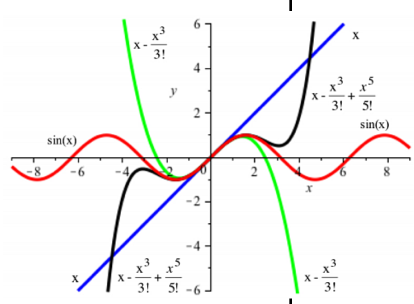
Taylor'i poolt tuletatud valem (1712) jäi kauaks suurema tähelepanuta, kuni J. L. Lagrange avastas valemi "tõelise" väärtuse.

Maclaurin'i nimi tuleb šoti matemaatiku Colin Maclaurin'i (1698 - 1746) nimest.

Colin Maclaurin. Allikas: Wikipedia

Viimati saadud siinuse valemit võib lõpmatu reana kirjutada ka kujul

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots .$$



Allikas: [3]

Kui võtta $x = 1$ (mis asub päris kaugel punktist 0 ja $n = 9$), siis saame

$$\sin(1) \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = 0.84147101,$$

mis erineb arvutiga leitud väärtusest $\sin(1) \approx 0.84147098$ suuruse $3 \cdot 10^{-8}$ võrra.

Jääkliiget ennast võime siin hinnata üpris jämedalt:

$$|\alpha_n(x)| = \left| \frac{(\sin(\xi))^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}, \quad |x| \leq 1,$$

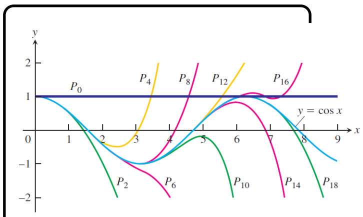
millest

$$|\alpha_9(x)| \leq \frac{1}{10!} \leq 2.8 \cdot 10^{-7}, \quad |x| \leq 1.$$

Viimane tähendab, et $-1 \leq x \leq 1$ korral võime siinuse väärtuse leida polünoomi $P_9(x)$ abil nii, et viga ei ole suurem kui $2.8 \cdot 10^{-7}$.

Analoogiliselt võime leida, et

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots .$$



Allikas: [9]

◇ ◇ ◇

Osutub, et Taylor'i valem kehtib ka natukene nõrgematel eeldustel.

Teoreem 11.2

Kui funktsioonil f on punktis a lõplikud tuletised kuni järguni n, siis kehtib funktsiooni f Taylor'i valem jääkliikmega Peano kujul:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k + \alpha_n(x), \quad \alpha_n = o\left((x-a)^n\right). \quad (11.9)$$

Kui punkt x on küllalt lähedane punktile a, siis võime funktsiooni f väärtust arvutada ligikaudu Taylor'i polünoomist $P_n(x)$, s.t. võime võtta

$$f(x) \approx P_n(x),$$

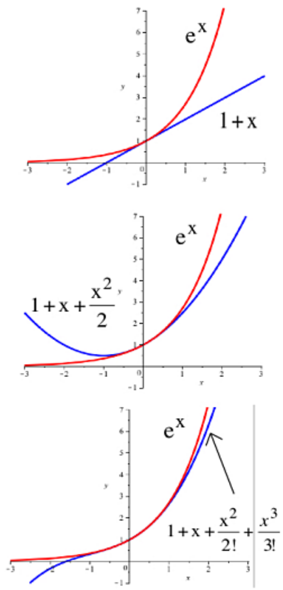
kusjuures tehtav viga võrdub jääkliikmega $\alpha_n(x)$. Kui nüüd punkti a vaadeldavas ümbruses on tuletis $f^{(n+1)}(x)$ tõkestatud, s.t. leidub konstant $M > 0$, et $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ vaadeldavas ümbruses, siis Taylor'i valemi jääkliikme jaoks Lagrange'i kujust kehtib hinnang

$$|\alpha_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot |x-a|^{n+1}, \quad (11.10)$$

mis võimaldab hinnata funktsiooni f lähendamisel Taylor'i polünoomiga tehtavat viga.

Näide 11.2 Leiame funktsiooni $f(x) = e^x$ Taylor'i valemi punktis $a = 0$ (Maclaurin'i valem) ja arvutame selle abil ligikaudu arvu e, võttes Taylor'i valemis $n = 8$. Et

Funktsiooni e^x erinevad lähendid.



Allikas: [3]

$$f^{(k)}(x) = (e^x)^{(k)} = e^x, \quad k \in \mathbb{N},$$

siis $f(0) = 1$ ja $f^{(k)}(0) = 1$. Valemi (11.8) põhjal

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \alpha_n(x),$$

kus

$$\alpha_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\xi}, \quad \xi \in (0, x).$$

On teada, et $0 < e < 3$, siis juhul $|x| \le 1$ korral saame jääkliikme jaoks ülalt hinnangu

$$|\alpha_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\xi} \right| \le \frac{3}{(n+1)!}, \quad |x| \le 1.$$

Kui $x = 1$, $n = 8$, võime kirjutada

$$e = e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2.71828,$$

kusjuures tehtud vea jaoks kehtib hinnang

$$|\alpha_8| \le \frac{3}{9!} < 0.000009 = 9 \cdot 10^{-6}.$$

◇ ◇ ◇

11.3 Funktsiooni uurimine esimese tuletise abil

Teoreem 11.3 Kui funktsioon f on diferentseeruv vahemikus (a, b) ja $f'(x) > 0$ iga argumendi $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f kasvab selles vahemikus. Kui funktsioon f on diferentseeruv vahemikus (a, b) ja $f'(x) < 0$ iga argumendi $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f kahaneb selles vahemikus.

Erijuhul võib funktsiooni esimese ja teise tuletise kohta saada palju erinevaid tulemusi. Esitame siinkohal meie arvates kõige olulisemad.

Tõestus. Tõestame tulemuse kasvava funktsiooni kohta. Olgu $f'(x) > 0$ iga $x \in (a, b)$ korral. Valime suvalised punktid $x_1, x_2 \in (a, b)$ nii, et $x_1 < x_2$. Kuna funktsioon on diferentseeruv vahemikus (a, b), siis ka pidev igas osalõigus $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. Saame kasutada Lagrange'i keskväärtusteoreemi, s.t. leidub punkt $\xi \in (x_1, x_2)$ nii, et kehtib võrdus

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

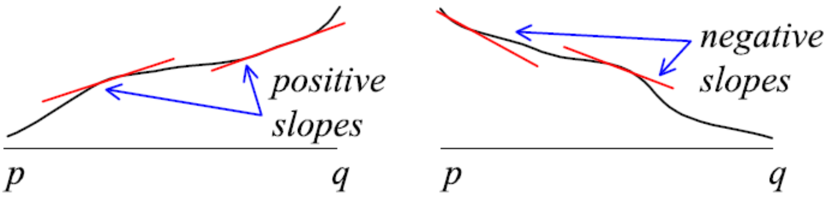
Et $f'(x) > 0$, siis

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) > 0,$$

mis ütlebki, et $f(x_2) > f(x_1)$, s.t. funktsioon f on kasvav antud piirkonnas. □

Märkus 11.3

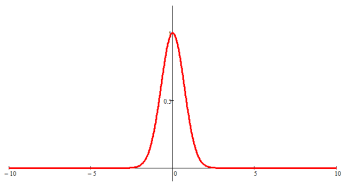
Geomeetriliselt tähendab tingimus $f'(x) > 0$ (funktsioon kasvab) seda, et joone $y = f(x)$ puutuja moodustab x-telje positiivse suunaga iga $x \in (a, b)$ korral teravnurga ja tingimus $f'(x) < 0$ (funktsioon kahaneb) seda, et joone $y = f(x)$ puutuja moodustab x-telje positiivse suunaga iga $x \in (a, b)$ korral nürinurga.



Allika: [6]

Näide 11.3 Uurime funktsiooni $f(x) = e^{-x^2}$. Leiame tuletise

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}.$$



Eksponentfunktsioon e^z on iga arvu z korral positiivne. Järelikult piirkonnas $x \in (-\infty, 0)$ kehtib $f'(x) > 0$ ja funktsioon kasvab ning piirkonnas $x \in (0, \infty)$ kehtib $f'(x) < 0$ ja funktsioon kahaneb selles vahemikus. $\diamond \diamond \diamond$

Definitsioon 11.3

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis a lokaalne maksimum, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii et

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis a lokaalne miinimum, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii et

$$f(x) \geq f(a), \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Diferentseeruva funktsiooni lokaalse ekstreemumi (maksimum või miinimum) leidumiseks punktis a on Fermat' teoreemi põhjal tarvilik, et $f'(a) = 0$. Kui funktsioon ei ole diferentseeruv (kuid on siiski määratud), siis sellises punktis võib samuti lokaalne ekstreemum leiduda (näiteks $y = |x|$ korral on $x = 0$ miinimumpunkt).

Definitsioon 11.4

Määramispiirkonna punkte, kus $f'(x) = 0$ ja punkte, kus funktsioon f ei ole diferentseeruv, nimetatakse funktsiooni f kriitilisteks punktideks.

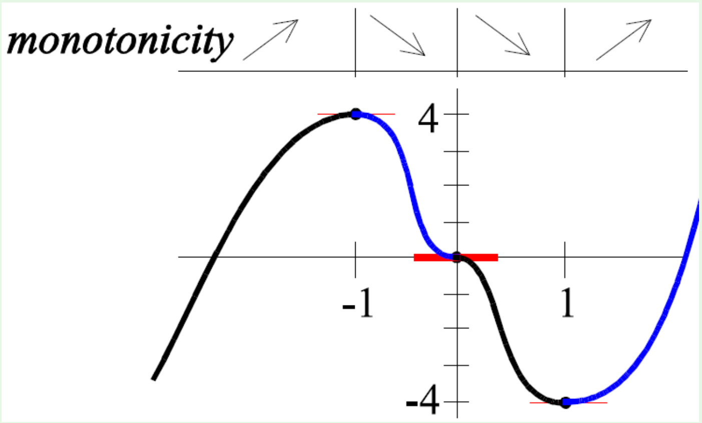
Teoreem 11.4

Olgu funktsioon f **pidev** kriitilises punktis a. Siis kehtivad väited:

1. Kui punkti a läbimisel (positiivses suunas) $f'(x)$ märk muutub $'+' \to' -'$ siis on funktsioonil f punktis a lokaalne maksimum (funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemiseks);

2. Kui punkti a läbimisel $f'(x)$ märk muutub $'-' \to' +'$, siis on funktsioonil f punktis a lokaalne miinimum (funktsiooni kahanemine läheb üle kasvamiseks);

3. Kui punkti a läbimisel $f'(x)$ märk ei muutu, siis punktis a ekstreemumit ei ole.



Allika: [6]

Näide 11.4 Funktsioon $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ on pidev kogu reaalteljel, kuid ei ole diferentseeruv punktis $x = 0$, s.t. 0 on funktsiooni kriitiline punkt. Leiame tuletise

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Samas, $f'(x) < 0$, kui $x < 0$ ja $f'(x) > 0$, kui $x > 0$. Funktsioon kahaneb ja kasvab, seega $x = 0$ on funktsiooni f lokaalne miinimum.

$\diamond\ \diamond\ \diamond$

Märkus 11.4

Peale lokaalsete ekstreemumite võivad meile huvi pakkuda globaalsed ekstreemumid, s.t. piirkonna X punktid, milles funktsiooni väärtus on kõige suurem või kõige väiksem võrreldes $f(x)$, $x \in X$, väärtustega.

Globaalsete ekstreemumite leidmiseks tuleb leida kõik lokaalsed ekstreemumid ja leida funktsiooni väärtused nendes. Eraldi tuleb leida funktsiooni väärtused piirkonna otspunktides (kui tegemist on lõiguga) ning katkevuspunktides. Saadud suurim või väikseim väärtus ongi funktsiooni globaalseks ekstreemumiks.

Näide 11.5 Lennukompanii "Müüme Põhku Tõustes Õhku" arvestab pileti hinnaks iga istekoha eest 300 eurot, lisades baashinnale juurde 2 eurot iga välja müümata istekoha eest. Kui mitu kohta tuleks 200-istmelises lennukis välja müüa, et lennufirma kasum oleks suurim?

Funktsiooni tuletise leidmise kohta on olemas üks suur klass praktilisi rakendusi: optimeerimine. Tavaliselt huvitab meid kulude minimeerimine ja tulude maksimeerimine. Viimane taandub aga funktsiooni globaalse ekstreemumi leidmisele.

Esmapilgul võiks tunduda, et triviaalne 200 piletit ja kasum $200 \cdot 300 = 60000$ eurot võiks olla vastus, aga päris nii lihtne see ei ole. Olgu x müüdud piletite arv, $200 - x$ müümata piletite arv. Siis ühe pileti hind on

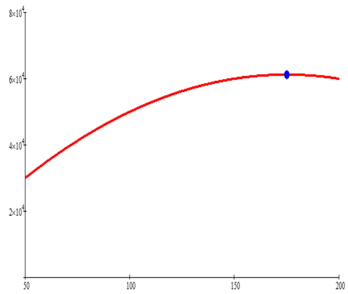
$$p(x) = 300 + 2(200 - x) = 700 - 2x.$$

Kõikide müüdud piletite pealt saab tulu

$$T(x) = x \cdot p(x) = 700x - 2x^2.$$

Kasumifunktsiooni $T(x)$ maksimumi leidmiseks leiame tuletise ja paneme ta võrduma nulliga (kuna maksimum võib leiduda vaid kriitilises punktis või siis piirkonna otspunktides):

$$700 - 4x = 0.$$



Saame, et $x = 175$ istekohta. Sel juhul teenib lennukompanii $175 \cdot (300 + 2(25)) = 175 \cdot 350 = 61250$ eurot. Kuigi erinevus on väike, annab see ettekujutuse optimeerimise võimalustest.

Päris elus kogu mudel muidugi nii lihtne ei ole. Lisada tuleks tegurid, mis arvestavad turu olukorda, konkurentsi, tarbijate ostujõudu jne.

◇ ◇ ◇

Näide 11.6

Teatud optimaalseid väärtusi võib välja lugeda ka graafikult, ilma et peaks teadma konkreetseid funktsioone. Olgu v auto liikumise kiirus ja g kütuse kulu ajaühikus. Vaatleme graafikut, kus ühel teljel on auto liikumise kiirus v ja teisel teljel on kütuse kulu ajas. Oleme huvitatud kütusekulust pikkusühiku kohta $G = \frac{g}{v}$ (siin gallonit miili kohta, näide pärineb õpikust [4]).

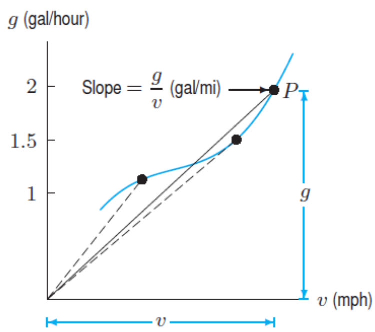


Figure 4.35: Graphical representation of gas consumption per mile, $G = g/v$

Allikas: [4]

Me soovime leida G minimaalset väärtust. Võttes graafikul joone peal punkti P, tekib täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet on g ja teine v, üks nurkadest asub nullpunktis. Seega hüpotenuus asub sirgel, mille tõus on $\frac{g}{v}$. Edasi on lihtne aru saada, et $G = \frac{g}{v}$ on minimaalne punktis, kus vastava sirge tõus on minimaalne (kõige väiksem nürinurk).

Antud juhul saame, et kiiruse $v = 50$ korral on kütuse kulu miili kohta kõige väiksem. Sedasi saab andmeid lugeda suvalise suhte $\frac{f(x)}{x}$ kohta. Meie tehtud analüüs on sisuliselt sama, mis leida funktsiooni $\frac{f(x)}{x}$ tuletis ja lahendada võrrand $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$,

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

◇ ◇ ◇

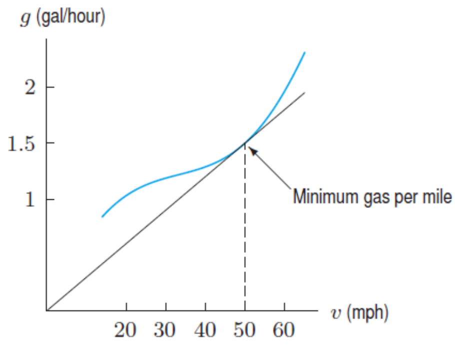


Figure 4.36: Velocity for maximum fuel efficiency

Allikas: [4]

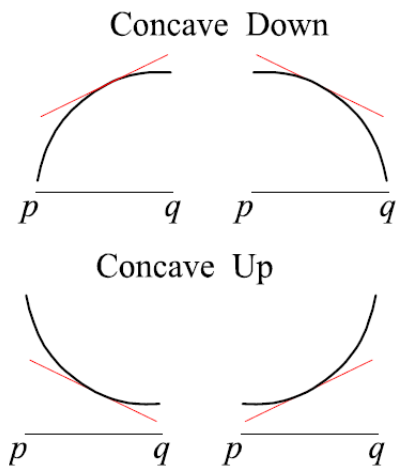
11.4 Funktsiooni uurimine teise tuletise abil

Jooneks $y = f(x)$ nimetame funktsiooni f graafikut. Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikus (a, b). Siis igas punktis $P = (x, f(x))$ on joonel $y = f(x)$ olemas puutuja.

Definitsioon 11.5

Joont $y = f(x)$ nimetatakse kumeraks vahemikus (a, b), kui selle joone puutuja on igas punktis $P = (x, f(x))$, $x \in (a, b)$, ülalpool joont.

Joont $y = f(x)$ nimetatakse nõgusaks vahemikus (a, b), kui selle joone puutuja on igas punktis $P = (x, f(x))$, $x \in (a, b)$, allpool joont.



Allikas: [6]

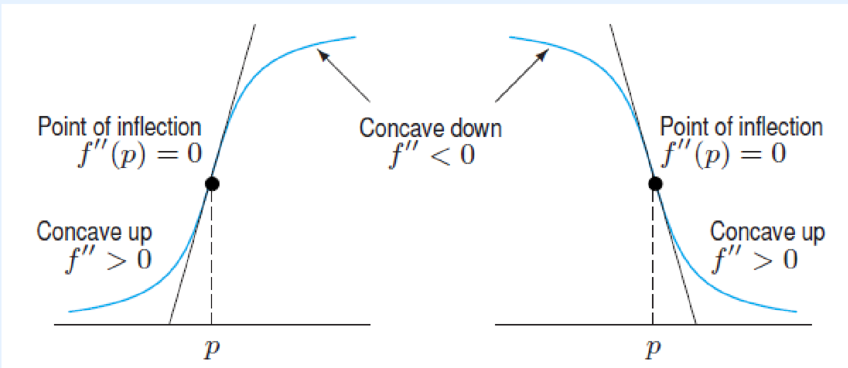
Definitsioon 11.6

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv vahemikus (a, b). Kui $f''(x) < 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis on antud joon kumer selles vahemikus.

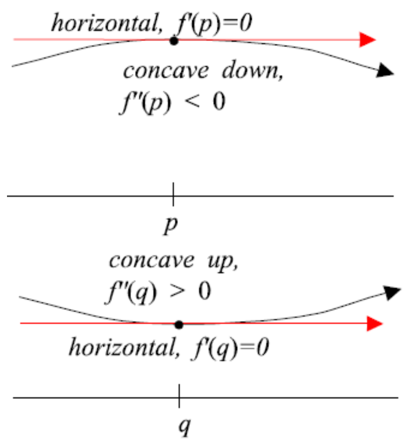
Kui $f''(x) > 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis on antud joon nõgus selles vahemikus.

Definitsioon 11.7

Joone $y = f(x)$ graafiku punkti $C = (c, f(c))$, mis eraldab joone kumerat osa nõgusast, nimetatakse selle joone käänupunktiks (eeldame puutuja olemasolu punktis C). Käänupunktis puutuja lõikab joont.



Allikas: [4]



Allikas: [6]

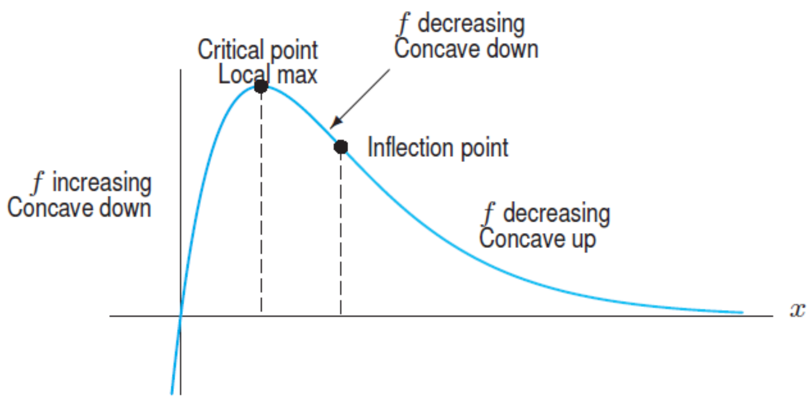
Näide 11.7 Vaatleme funktsiooni $f(x) = x \cdot e^{-x}$. Leiame kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid (kui need leiduvad). I tuletis,

$$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1 - x) \cdot e^{-x}.$$

Punktis $x = 1$ asub lokaalne maksimum. Leiame II tuletise,

$$f''(x) = -e^{-x} - (1 - x) \cdot e^{-x} = (x - 2) \cdot e^{-x}.$$

Piirkonnas $x < 2$ on $f''(x) < 0$ ja funktsioon on kumer. Piirkonnas $x > 2$ on $f''(x) > 0$ ja funktsioon on nõgus. Kuna punktis $x = 2$ kumerus läheb üle nõgususeks, siis on punkt $x = 2$ ka käänupunktiks.



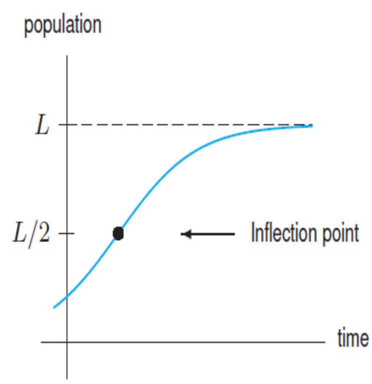
Allikas: [4]

◇ ◇ ◇

Näide 11.8 Vaatleme logistilist kõverat, mis iseloomustab populatiooni kasvu ajas, kusjuures populatsiooni piiriks on L ja käänupunktiks on $\frac{L}{2}$.

Enne punkti $\frac{L}{2}$ on joon nõgus, s.t. kasvamise kiiruse muutumise kiirus (ehk kiirendus) on positiivne.

Seega nõgus, kasvav funktsioon tähendab, et kasvamise kiirus on igas järgmises punktis suurem kui eelmises ja kõige suurem on see käänupunktis $\frac{L}{2}$. Edasi hakkab kasv aeglustuma, s.t. nõgus kasvav funktsioon tähendab, et kasvamise kiirus igas järgmies punktis on väiksem kui eelmises (kiirendus ehk funktsiooni II tuletis on negatiivne).



Allikas: [4]

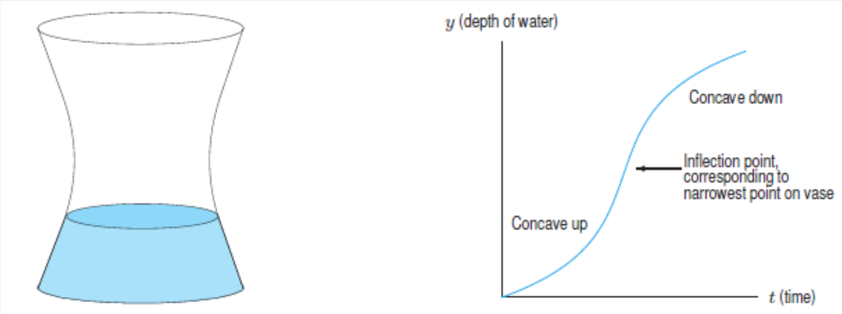
◇ ◇ ◇

Märkus 11.5

Analoogiliselt võib analüüsida kõiki nelja põhitüüpi: kasvav-kiirendav, kasvav-aeglustav, kahanev-aeglustav ja kahanev-kiirendav.

Allikas: [1]

Ülesanne 11.1 Vaasi valatakse vett konstantse kiirusega. Graafikul on näha vee taseme tõus ajas. Selgitada tekkiva graafiku käänupunkti, nõgususe ja kumeruse piirkondade tähendust seoses vaasi kuju ja veetaseme tõusuga.



Allikas: [4]

11.5 Funktsiooni graafiku joonestamine (*)

Üldjuhul on kasulik jälgida järgmist skeemi:

1. Leiame funktsiooni määramispiirkonna (kui lihtsalt on võimalik, siis ka muutumispiirkonna) ja katkevuspunktid. Teeme kindlaks, kas funktsioonil on iseloomulikke jooni, näiteks paaris või paaritu funktsioon, perioodiline funktsioon.

2. Leiame asümptoodid (sirged, millele funktsioon võiks lõpmatus protsessis läheneda, vt. all pool).

3. Leiame kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid (miinimum- ja maksimumkohad). Üldiselt, leiame info, mille annab meile funktsiooni I tuletis.

4. Leiame antud funktsiooni graafiku kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid. Seega info, mida saab funktsiooni II tuletise kaudu.

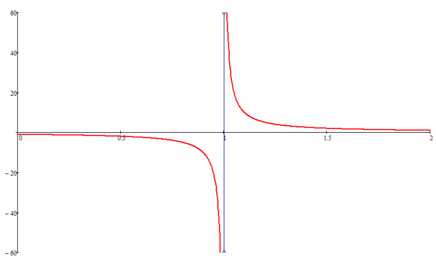
5. Joonestame saadud tulemuste põhjal graafiku.

Definitsioon 11.8
Sirget $x = a$ nimetatakse joone $y = f(x)$ püstasümptoodiks, kui $|f(a+)| = \infty$ või $|f(a-)| = \infty$.

On selge, et graafikul saab püstasümptood olla vaid katkevuspunktides.

Näide 11.9 Joone $y = \frac{1}{x-1}$ vasak- ja parempoolseks püstasümptoodiks on sirge $x = 1$, sest et

$$f(1-) = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad f(1+) = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = \infty.$$



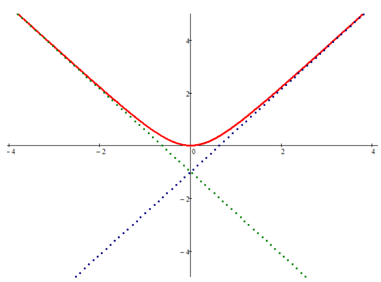
◇ ◇ ◇

Definitsioon 11.9

Sirget
$$y = k\,x + b \tag{11.11}$$
nimetatakse joone $y = f(x)$ parempoolseks (vasakpoolseks) kaldasümptoodiks, kui selle sirge ja funktsiooni graafiku vaheline kaugus läheneb lõpmatus protsessis nullile, s.t.
$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(k\,x+b)] = 0 \quad \left(\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(k\,x+b)] = 0\right). \tag{11.12}$$

Lihtne on tuletada (tõusunurga tangensist), et kaldasümptoodi tõus k peab võrduma piirväärtusega
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \left(k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\right). \tag{11.13}$$
Siinjuures, parempoolse kaldasümtoodi korral kehtib protsess $x \to \infty$ ja vasakpoolse kaldasümptoodi korral protsess $x \to -\infty$. Kauguse avaldisest $f(x) - (k\,x+b)$ saab avaldada
$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - k\,x] \quad \left(b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - k\,x]\right). \tag{11.14}$$
Kui k või b tulevad lõpmatused, siis vastav kaldasümptood puudub.

Näide 11.10 Leiame joone $y = x\cdot\arctan(x)$ kaldasümptoodid (kui need üldse leiduvad). Esiteks sirge tõus (leiame mõlemad lõpmatud protsessid korraga),
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cdot\arctan(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$
Parempoolse kaldasümptoodi korral $k = \frac{\pi}{2}$ ja
$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\arctan(x) - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(x)-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$
$$\overset{\frac{0}{0},L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{1+x^2} = -1.$$
Vasakpoolse kaldasümptoodi korral $k = -\frac{\pi}{2}$ ja analoogiliselt
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot\arctan(x) + \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\arctan(x)+\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$
$$\overset{\frac{0}{0},L'H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1.$$



Seega parem- ja vasakpoolne kaldasümptood leidub ja on vastavalt
$$y = \frac{\pi}{2}x - 1, \quad y = -\frac{\pi}{2}x - 1.$$

◇ ◇ ◇

Näide 11.11 Joonestame funktsiooni

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

graafiku (vt. [7]).

1. Funktsiooni määramispiirkonnaks on $X = \mathbb{R} \setminus (0, 2]$. Lihtne on kontrollida, et funktsioon ei ole paaritu ($f(-x) \neq -f(x)$) ega paaris ($f(-x) \neq f(x)$) ja f ei ole perioodiline. Kuna $f(x) \geq 0$ iga $x \in X$ korral, siis funktsiooni graafik asub ülalpool x-telge.

2. Sirge $x = 2$ on funktsiooni f parempoolseks püstasümptoodiks ($f(2+) = \infty$). Leiame kaldasümptoodid $y = k\,x + b$. Selleks arvutame

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|}{x} \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \pm 1.$$

Leiame

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) &= \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x-2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})} = 1.\end{aligned}$$

ja analoogiliselt

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = -1.$$

Saime, et parem- ja vasakpoolne kaldasümptood on vastavalt

$$y = x + 1, \quad y = -x - 1.$$

3. Leiame funktsiooni tuletise (logaritmilisest diferentseerimisest)

$$\begin{aligned}f'(x) &= f(x)\cdot\left(\frac{3}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-2|\right)' = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}\cdot\left(\frac{3}{2x} - \frac{1}{2(x-2)}\right) \\ &= \frac{\sqrt{x}\cdot(x-3)}{\sqrt{(x-2)^3}}.\end{aligned}$$

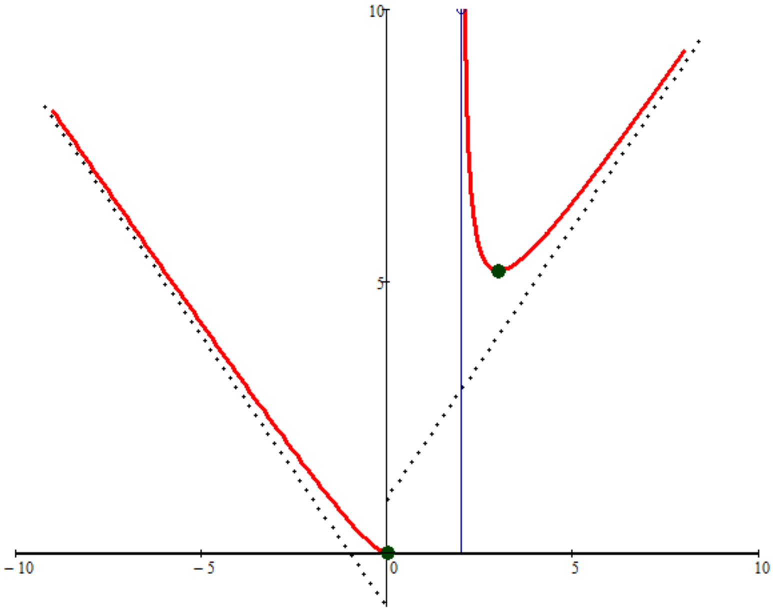
Tuletis ei ole määratud punktis $x = 0$, kuid võrrandist $f'(x) = 0$ saame kriitiliseks punktiks $x = 3$. Lokaalseks miinimumiks saame $f(3) = \sqrt{27}$, kuna $f'(x) < 0$ piirkonnas $x \in (2, 3)$ (kahaneb) ja $f'(x) > 0$ piirkonnas $x \in (3, \infty)$ (kasvab). Kui $x < 0$, siis $f'(x) < 0$ ja funktsioon on kahanev. Kuna $f(0) = 0$, siis $x \leq 0$ jaoks asub punktis $x = 0$ globaalne miinimum.

4. Leiame funktsiooni teise tuletise (logaritmilisest diferentseerimisest)

$$\begin{aligned}f''(x) = \quad & f'(x)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\ln|x| + \ln|x-3| - \tfrac{3}{2}\ln|x-2|\right)' = \tfrac{\sqrt{x}\cdot(x-3)}{\sqrt{(x-2)^3}} \\ & \cdot\left(\tfrac{1}{2x} + \tfrac{1}{x-3} - \tfrac{3}{2(x-2)}\right) = \tfrac{\sqrt{x}\cdot(x-3)}{\sqrt{(x-2)^3}}\cdot\tfrac{6}{2x\cdot(x-3)\cdot(x-2)} = \tfrac{3}{\sqrt{x\cdot(x-2)^5}}.\end{aligned}$$

Piirkonnas $x < 0$ kehtib $f''(x) > 0$ ning piirkonnas $x > 2$ korral $f''(x) > 0$ ja funktsioon on oma määramispiirkonnas kõikjal nõgus.

5. Joonestame graafiku ... siinkohal konspekti jaoks kahjuks küll arvuti abiga :–D



◇ ◇ ◇

Viited

[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] G. Gamow. My World Line. Viking Press, 1970.

[3] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[4] D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, P. F. Lock, D. E. Flath. Applied Calculus. Wiley, 2010.

[5] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross, 1997-98.

[6] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.

[7] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[8] V. Soomer. Matemaatiline analüüs. Tartu Riiklik Ülikool, 1988.

[9] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.

[10] A. J. Washington. Basic Technical Mathematics with Calculus. 10th ed. Pearson, 2014.