Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

12 Algfunktsioon ja määramata integraal

Sisukord

Kontrolltöö teemad

1. Määramata integraali seos kiirenduse, kiiruse ja teepikkusega.
2. Põhiliste elementaarfunktsioonide algfunktsioonid.
3. Muutuja vahetuse võte määramata integraali leidmisel.
4. Ositi integreerimise reegel ja selle kasutamine.

Eksamiteemad

1. Algfunktsiooni mõiste.
2. Määramata integraali mõiste.
3. Määramata integraali seos kiirenduse, kiiruse ja teepikkusega.
4. Põhiliste elementaarfunktsioonide algfunktsioonid.
5. Muutuja vahetuse võte määramata integraali leidmisel.
6. Ositi integreerimise reegel ja selle kasutamine.

12.1 Sissejuhatus

Vaatleme objekti liikumist seaduse $s = s(t)$ alusel, kus s näitab läbitud teepikkust ajahetkel t. Funktsiooni s tuletis andis meile hetkkiiruse $v(t) = s'(t)$ hetkel t ja teine tuletis kiirenduse $a(t) = s''(t)$,

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Vaatleme nüüd olukorda, kus me näiteks teame objekti kiirust $v(t)$ igal ajamomendil. Meid huvitab, kas kiiruse $v(t)$ alusel saab teada objekti asukoha $s(t)$ igal ajahetkel t. Osutub, et teatud tingimustel on see võimalik. Sellist vastupidise suunaga info leidmist me nimetamegi määramata integraali leidmiseks (sõnastame täpsemalt all pool). Kohe me näeme, et kiirenduse või kiiruse teadmisel kehtivad järgmised omadused:

$$v(t) = \int v'(t)\,dt = \int a(t)\,dt, \quad s(t) = \int s'(t)\,dt = \int v(t)\,dt.$$

12.2 Algfunktsioon

Definitsioon 12.1

Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f algfunktsiooniks vahemikus (a, b), kui $F'(x) = f(x)$ iga $x \in (a, b)$ korral.

Funktsiooni f algfunktsiooni leidmine on sama, mis leida diferentsiaalvõrrandi

$$y' = f(x)$$

lahend $y = y(x)$. Diferentsiaalvõrrandid on looduse modelleerimisel üks väga levinud vahend.

Näide 12.1 Funktsiooni $y = x^3$ üheks algfunktsiooniks on funktsioon $y = \frac{x^4}{4}$, üldiselt iga funktsioon kujul

$$y = \frac{x^4}{4} + C,$$

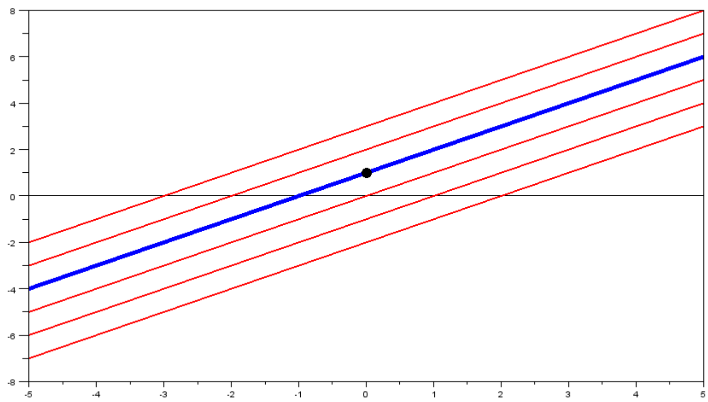
kus C on suvaline konstant. Tõepoolest,

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3.$$

◇ ◇ ◇

Näide 12.2 Arvestades sissejuhatuses toodud kommentaare, on lihtne näha, et kiirenduse $a(t)$ algfunktsiooniks on kiirus $v(t)$ ja kiiruse algfunktsiooniks on teepikkus $s(t)$. Matemaatiliselt kehtib väide vähemalt siis, kui a ja v on pidevad funktsioonid aja t järgi.

Olgu näiteks punkti liikumise kiirus konstantne $v(t) = 1$. Sel juhul v algfunktsiooniks on $s(t) = t + C$ (kuna $(t + C)' = 1$). Kui me liikumise kohta rohkem infot ei tea, siis v algfunktsiooniks võib olla iga sirge $t + C$, mille tõus on üks, kuid lõikepunkt y-teljega suvaline (s.t. kõik sirged, mille tõus on üks).



Kui me näiteks teame, et alghetkel $t = 0$ objekti asukoht oli punktis 1, siis võrdustest

$$s(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 + C = 1$$

saame, et $C = 1$ ja punkti liikumisseaduseks on üks konkreetne sirge $s(t) = t + 1$. Kui $s(0)$ oli midagi muud, siis saame mingi teise paralleelse sirge.

◇ ◇ ◇

Märkus 12.1

Kehtib väide. Funktsiooni f kõik algfunktsioonid F avalduvad kujul $F(x) + C$, kus F on funktsiooni f mingi algfunktsioon ja $C \in \mathbb{R}$ on suvaline konstant.

12.3 Määramata integraal

Definitsioon 12.2

Funktsiooni f kõikide algfunktsioonide üldavaldist $F(x)+C$ nimetatakse funktsiooni f määramata integraaliks. Siin F on funktsiooni f mingi algfunktsioon ja $C \in \mathbb{R}$ on suvaline konstant. Tähistame

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{12.1}$$

Definitsioon 12.3

Funktsiooni määramata integraali leidmist nimetatakse selle funktsiooni integreerimiseks.

Näide 12.3 Leiame

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

◇ ◇ ◇

Te sõidate autoga maanteel kiirusega 90 km/h. Kui suur peab olema auto konstante aeglustus (negatiivne kiirendus, a), et auto peatuks 73 meetri pärast?

Tähistame auto liikumise seaduse $s = s(t)$. Siis saame diferentsiaalvõrrandi

$$s''(t) = a$$

tingimustega $v(0) = s'(0) = 60$ ja $s(0) = 0$. Viimase lahendamine taandub algfunktsiooni leidmise peale. Seega $v(t) = s'(t) = at + C$. Kuna $v(0) = 60$, siis $C = 60$ ja kiiruse avaldiseks tuleb $v(t) = at + 60$.

Edasi, $s(t) = a\frac{t^2}{2} + 60t + C$, millest algtingimuse $s(0)$ korral saame $C = 0$ ja $s(t) = a\frac{t^2}{2} + 60t$.

Kiirus $v = 0$, kui $t = -\frac{60}{a}$. Jääb veel asendada see aeg võrrandisse

$$\frac{73}{1000} = a\frac{t^2}{2} + 60t.$$

Pärast ühikutega opereerimist saame vastuseks $a \approx -1.9$ m/s^2.

Märkus 12.2

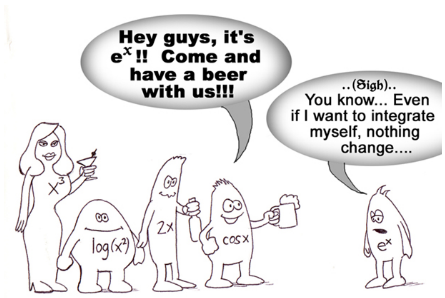
Määramata integraali definitsioonist järelduvad järgmised seosed:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$,
2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\cdot dx$,
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Seega diferentseerimine ja integreerimine on teineteise pöördoperatsioonid (konstantse liidetava täpsusega). Inglise keeles kasutatakse tuletise jaoks väljendit “derivative” ja määramata integraali jaoks väljendit “antiderivative”, mis on tegelikult täpsem, kui eesti keelne “integreerimine”. Miks, seda selgitame siis, kui tutvume määratud integraali mõistega.

Märkus 12.3

Funktsioonil f on olemas määramata integraal parajasti siis, kui sellel funktsioonil on olemas algfunktsioon. **Igal vahemikus** (a, b) **pideval funktsioonil on olemas algfunktsioon selles vahemikus.**



12.4 Integraal põhilistest elementaarfunktsioonidest

Astmefunktsioonid

$$\int c\,dx = c\,x + C \qquad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \qquad \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad \int -\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x} + C \qquad \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C$$

Eksponentfunktsioonid

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

Trigonomeetrilised funktsioonid

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \qquad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot(x) + C$$

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{arccot}(x) + C$$

Hüperboolsed funktsioonid

$$\int \operatorname{sh}(x)\,dx = \operatorname{ch}(x) + C \qquad \int \operatorname{ch}(x)\,dx = \operatorname{sh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}\,dx = \operatorname{th}(x) + C \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}\,dx = -\operatorname{cth}(x) + C$$

Hüperboolsete funktsioonide pöördfunktsioonid

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsh}(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arth}(x) + C \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arcth}(x) + C$$

Märkus 12.4

Kõikidel funktsioonidel ei pruugi leiduda algfunktsiooni elemetaarfunktsioonide kujul (selliseid funktsioone saab leida ainult ligikaudsete meetoditega). Näiteks järgmisi integraale ei saa esitada elementaarfunktsioonide abil:

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \cos\left(x^2\right)\,dx, \quad \int \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

12.5 Tehetega seotud integreerimisreeglid

Teoreem 12.1

Kui on olemas integraalid $\int f(x)\,dx$ ja $\int g(x)\,dx$, siis kõikide reaalarvude $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral on olemas integraal $\int(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\,dx$, kusjuures

$$\int (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx. \tag{12.2}$$

Tõestus. Eelduse järgi leiduvad algfunktsioonid F ja G, nii et $F'(x) = f(x)$ ja $G'(x) = g(x)$ ja

$$\alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx = \alpha\, F(x) + \beta\, G(x).$$

Tuletise leidmiste omadustest kehtib

$$(\alpha\, F(x) + \beta\, G(x))' = \alpha\, F'(x) + \beta\, G'(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x).$$

Viimane ütlebki, et $(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))$ algfunktsiooniks on $(\alpha\, F(x) + \beta\, G(x))$. □

If there is a 50-50 chance that something can go wrong, then 9 times out of ten it will. (Paul Harvey News, 1979)

I gather, young man, that you wish to be a Member of Parliament. The first lesson that you must learn is, when I call for statistics about the rate of infant mortality, what I want is proof that fewer babies died when I was Prime Minister than when anyone else was Prime Minister. That is a political statistic. (Winston Churchill)

If you torture data enough it will confess, öeldud ühe statistikaprofessori poolt.

Näide 12.4 Leiame määramata integraali

$$\begin{aligned} \int \left(x^5 + 10\,\sin(x) - \frac{2}{x}\right) dx &= \int x^5\,dx + 10 \int \sin(x)\,dx - 2 \int \frac{1}{x}\,dx \\ &= \tfrac{x^6}{6} - 10\,\cos(x) - 2\,\ln|x| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 12.5 Auto sõidab konstantse kiirendusega a. Leida läbitud teepikkuse seadus, kui auto algkiirus oli $v(0) = v_0$ ja esialgne asukoht $s(0) = s_0$.

Leiame kiiruse

$$v(t) = \int a\,dt = a\,t + C,$$

kus tingimusest $v(0) = v_0$ saame, et $C = v_0$. Leiame teepikkuse

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (a\,t + v_0)\,dt = a\,\frac{t^2}{2} + v_0\,t + C,$$

kus tingimusest $s(0) = s_0$ saame, et $C = s_0$. Seega auto liigub seaduse

$$s(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + s_0$$

alusel. Kui liikumine ei ole konstantse kiirendusega, siis saaksime mingi muu liikumise seaduse.

◇ ◇ ◇

12.6 Muutuja vahetamine

Integreerimine on üldjuhul "raske" tehe. Tuletise leidmisel kasutasime korrutamise ja jagamise reegleid, liitfunktsiooni leidmise reeglit jne. Integraali leidmisel selliseid universaalseid reegleid eriti palju ei ole. Enamasti taandub integreerimine algfunktsiooni ära arvamisele, mille järel saab teatud abitulemustega näidata, et vastus tuleb see, mis ta peab tulema.

Seoses sellega on integreerimise jaoks välja töötatud palju erivõtteid (mõnikord ainult kindlat tüüpi funktsioonide jaoks), millest tutvustame siinkohal ainult kahte kõige olulisemat: muutujate vahetamine ja ositi integreerimine.

Lause 12.1

[5]. Kui funktsioonil f on intervallis X olemas algfunktsioon F ja φ on intervallis T diferentseeruv funktsioon muutumispiirkonnaga X, siis kehtib valem

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{12.3}$$

Tõestus. Funktsioon F on funktsiooni f algfunktsioon ja järelikult

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Meie eeldustel eksisteerib funktsioonide F ja φ liitfunktsioon $F \circ \varphi$ määramispiirkonnaga T. Liitfunktsioon $F \circ \varphi$ on toodud eeldustel diferentseeruv, kusjuures iga $t \in T$ korral kehtib seos

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Saime, et funktsiooni $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ algfunktsiooniks intervallis T on $F \circ \varphi$, mistõttu

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = (F \circ \varphi)(t) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

Kuna funktsiooni φ muutumispiirkond on intervall X, võime võtta $x = \varphi(t)$ ja seega

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(x) + C.$$

Kasutades eelnevaid seoseid, saamegi võrduse (12.3). $\square$

Näide 12.6 Leiame integraali

$$\int e^{2x-3}\,dx.$$

Teeme muutujavahetuse $y = 2x - 3$. Sel juhul $dy = d(2x-3) = 2dx$ ja $dx = \frac{dy}{2}$. Järelikult

$$\int e^{2x-3}\,dx = \int e^y \cdot \frac{1}{2}\,dy = \frac{e^y}{2} + C.$$

Asendades $y = 2x - 3$ tagasi, saame

$$\int e^{2x-3}\,dx = \frac{e^{2x-3}}{2} + C.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 12.5

Muutuja vahetamise võtte erijuhuks on diferentsiaali märgi alla viimise võte. Sel juhul on enamasti lihtne leida diferentsiaali $dv(t) = v'(t) \cdot dt$.

Näide 12.7 Leiame integraali

$$\int \cos(4x)\, dx.$$

Me teame, et koosinuse algfunktsiooniks on siinus. On lihtne näha, et $d(4x) = 4\, dx$. Seega võime kirjutada

$$\int \cos(4\,x)\, dx = \frac{1}{4}\int \cos(4x)\, d(4\,x) = \frac{1}{4}\sin(4\,x) + C,$$

mille võib leida ka muutuja vahetamise $y = 4\,x$ abil

$$\int \cos(4\,x)\, dx = \frac{1}{4}\int \cos(y)\, dy = \frac{1}{4}\sin(y) + C = \frac{1}{4}\sin(4\,x) + C.$$

◇ ◇ ◇

$$\int \textbf{devil} = \textbf{evil} + \textbf{C}$$

Näide 12.8 Leiame integraali

$$\int (x-3)^2\, dx.$$

Me teame, et ruutfunktsiooni algfunktsiooniks on teatav kuupfunktsioon. On lihtne näha, et $d(x-3) = dx$. Seega võime kirjutada

$$\int (x-3)^2\, dx = \int (x-3)^2\, d(x-3) = \frac{(x-3)^3}{3} + C,$$

mille võib leida ka muutuja vahetamise $y = x - 3$ abil

$$\int (x-3)^2\, dx = \int y^2\, dy = \frac{y^3}{3} + C = \frac{(x-3)^3}{3} + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide 12.9 Leiame integraali

$$\int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\, dx.$$

Märkame, et $d\, sin(x) = \cos(x)\cdot dx$. Seega võime kirjutada

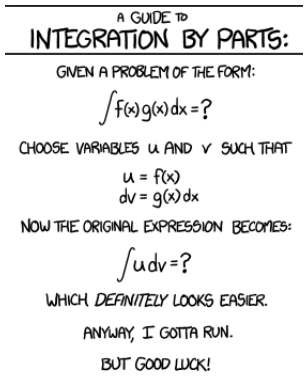
$$\int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\, dx = \int \sin^2(x)\, d\sin(x) = \frac{\sin^3(x)}{3} + C.$$

Kontrolliks võib leida, et

$$\left(\frac{\sin^3(x)}{3} + C\right)' = \frac{3\sin^2(x)}{3}\cdot\cos(x) = \sin^2(x)\cdot\cos(x).$$

◇ ◇ ◇

12.7 Ositi integreerimine



Lause 12.2

[5]. Olgu funktsioonid u ja v mingis intervallis X diferentseeruvad funktsioonid ja eksisteerigu integraal

$$\int v(x)\, u'(x)\, dx.$$

Siis eksisteerib ka integraal

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx$$

ja kehtib seos

$$\int \mathbf{u(x)\, v'(x)\, dx} = \mathbf{u(x)\, v(x)} - \int \mathbf{v(x)\, u'(x)\, dx}. \tag{12.4}$$

Tõestus. Tehtud eelduste korral on korrutis $u \cdot v$ diferentseeruv,

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Kuna on olemas integraal $\int v(x)\, u'(x)\, dx$, siis leidub funktsiooni $v \cdot u'$ algfunktsioon F. Järelikult

$$[u(x) \cdot v(x)]' = F'(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

millest saame

$$u(x) \cdot v'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' - F'(x) = [u(x) \cdot v(x) - F(x)]'.$$

Saime, et $(u \cdot v - F)$ on funktsiooni $u \cdot v'$ algfunktsioon. Tulemus ütlebki, et

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - F(x) + C = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx.$$

□

Märkus 12.6

Valemit (12.4) nimetatakse määramata integraali ositi integreerimise valemikis. Kuna $u'(x)\, dx = du$ ja $v'(x)\, dx = dv$, siis esitatakse seos sageli kujul

$$\int \mathbf{u\, dv} = \mathbf{u\, v} - \int \mathbf{v\, du}. \tag{12.5}$$

Näide 12.10 Leiame integraali

$$\int \underbrace{(x)}_{u}\, \underbrace{(e^x)}_{v'}\, dx = \underbrace{(x)}_{u}\, \underbrace{(e^x)}_{v} - \int \underbrace{(1)}_{u'}\, \underbrace{(e^x)}_{v}\, dx = xe^x - e^x + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide 12.11 Leiame integraali

$$\int x \cdot \cos(x)\, dx.$$

Kui meil on integraali märgi all polünoom korda teine funktsioon, siis on tihti lootust leida vastus ositi integreerimise teel.

Üldiselt võetakse funktsiooniks v selline funktsioon, millest on lihtne leida integraali ja funktsiooniks u selline, et u tuletis lihtsustab avaldist. Kuna tuletis alandab polünoomi järku ja integreerimine tõstab, siis kasulik on valida

$$u(x) = x, \quad dv(x) = \cos(x)\, dx.$$

Siit

$$u'(x) = x' = 1 \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

ja võrduse $dv(x) = \cos(x)\, dx$ integreerimisel saame

$$\int dv(x) = \int \cos(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad v(x) = \sin(x).$$

Seega ositi integreerimise valemi abil leiame

$$\int x \cdot \cos(x)\, dx = x \cdot \sin(x) - \int \sin(x)\, dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide 12.12 Vaatleme ühte sageli esinevat integraali

$$\int \sin^2(x)\, dx.$$

Leiame selle integraali mitmel erineval moel. Esiteks ositi integreerimisega, võttes $u = \sin(x)$ ja $dv = \sin(x)\, dx$. Siis

$$du = \cos(x)\, dx, \quad v(x) = -\cos(x).$$

Saame

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\, dx &= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\sin(2x) + \int (1 - \sin^2(x))\, dx.\end{aligned}$$

Siit saab leida, et

$$\int \sin^2(x)\, dx = -\frac{1}{2}\sin(2x) + x - \int \sin^2(x)\, dx.$$

Viies $\int \sin^2(x)\, dx$ paremalt poolt vasakule, tekib võrrand $\int \sin^2(x)\, dx$ suhtes. Järelikult

$$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

◇ ◇ ◇

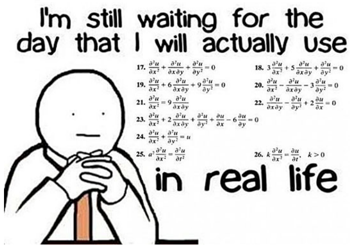
Näide 12.13 Teine võimalus $\int \sin^2(x)\,dx$ leidmiseks on kasutada trigonomeetrilist valemit

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)).$$

Siis

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int 2\sin^2(x)\,\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2x))\,dx\\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇



Allikas:
http://joyreactor.com/post/951597

Näide 12.14 Kolmas võimalus on kasutada siinuse kompleksarvulist esitust (imaginaarühik i käitub siin kui konstant),

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \left(\frac{e^{i\,x}-e^{-i\,x}}{2i}\right)^2 dx = \int \left(\frac{e^{i\,(2x)}+e^{-i\,(2x)}-2}{-4}\right) dx.$$

Arvestades, et

$$\int e^{i\,(2x)}\,dx = \int \frac{1}{2i}e^{i\,(2x)}\,d(2ix) = \frac{e^{i\,(2x)}}{2i} + C,$$

siis

$$\int \sin^2(x)\,dx = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i\,(2x)}-e^{-i\,(2x)}}{2i}\right) + \frac{x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

Analoogiliselt leitakse eraldi $\int \cos^2(x)\,dx$, kuid praegu saaksime otse leida

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)\,dx &= \int (1-\sin^2(x))\,dx = x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C\\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

12.8 Ratsionaalsete funktsioonide integreerimine

Vaatleme järgnevalt lihtsamaid juhte polünoomide $P(x)$ ja $Q(x)$ jagatise $\frac{P(x)}{Q(x)}$ integreerimisel.

Näide 12.15 Leiame integraali

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx.$$

Antud polünoomi $\frac{5x-1}{x^2-x-2}$ saab lahutada teguriteks

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}.$$

Seega

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-2}\,dx = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide 12.16 Leiame integraali

$$\int \frac{1}{x\cdot(x^2+4)}\,dx.$$

Antud polünoomi $\frac{1}{x\cdot(x^2+4)}$ saab lahutada teguriteks

$$\frac{1}{x\cdot(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Võttes tegurid uuesti ühisele nimetajale

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{Ax^2+4A+Bx^2+Cx}{x\cdot(x^2+4)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x\cdot(x^2+4)}$$

saame konstantide A, B ja C jaoks võrrandid

$$A+B=0, \quad C=0, \quad 4A=1.$$

Seega $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$ ja $C=0$. Kokkuvõtteks

$$\int \frac{1}{x\cdot(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln|x^2+4| + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide 12.17 Leiame integraali

$$\int \frac{2x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}\,dx.$$

Antud polünoomi $\frac{2x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}$ saab lahutada teguriteks

$$\frac{2x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Võttes tegurid uuesti ühisele nimetajale

$$\begin{aligned}\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} &= \frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2}{x^2\cdot(x-1)}\\ &= \frac{(A+C)x^2+(B-A)x-B}{x^2\cdot(x-1)}\end{aligned}$$

saame konstantide A, B ja C jaoks võrrandid

$$A+C=2, \quad B-A=0, \quad -B=1.$$

Seega $A=-1$, $B=-1$ ja $C=3$. Kokkuvõtteks

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}\,dx &= \int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x-1}\right)dx\\ &= -\ln|x| + \frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Mõningaid erijuhte vaatleme veel lisaks praktikumides.

Viited

[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[3] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross, 1997-98.

[4] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.

[5] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[6] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.

[7] A. J. Washington. Basic Technical Mathematics with Calculus. 10th ed. Pearson, 2014.