variant A

MTMM.00.188 Kõrgem matemaatika, 1. kontrolltöö, 15.10. 2013

- Kommentaarid

1. Kompleksarvud (3 x 3p = 9p).

   a) Kompleksarvude jagatis ja selle kaaskompleks. Vastus: i ja $-i$.

   - Viga tähendas siin enamasti mingit hooletusviga korrutamisel, kus miinusmärgi vale arvestus tekitas palju segadust.
   - Veel võidi siin ära unustada, et tekib kaaskompleksiga korrutamine või et nimetajas ei ole mitte moodul, vaid mooduli ruut.

   b) Kolmanda astme juured. Põhiviga saab siin olla vaid juure leidmise valemi vales kirjutamises. Üsna lihtsalt saame

   $$z = 27\,e^{i\frac{\pi}{2}} = 27\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

   Siit kolmanda astme juured avalduvad kui

   $$\sqrt[3]{z} = 3\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi\right)} = 3\,e^{i\left(\frac{4k+1}{6}\pi\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

   c) Trigonomeetrilisel kujul kompleksarvude korrutis. Vastus tuleb väga lihtsalt (moodulid korrutatakse ja argumendid liidetakse):

   $$z_1 \cdot z_2 = 10\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 10\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

   Asub see arv 10 ühiku kaugusel nullpunktist, neljandas veerandis täisnurga poolitaja peal.

   - Siin tehti vigu, kui üritati trigonomeetrilist kuju algebraliseks teisendada, siis saadi koosinuse märk vale. Tegelikult paarisfunktsioonina $\cos(-x) = \cos(x)$.

2. Leida piirväärtused (3 x 3p = 9p):

   a) Juur tüüpi $\infty - \infty$. See on levinud „punktisööja“ ülesanne. Esiteks lahendus:

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4+3x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-\sqrt{x^4+3x^2}\right)\left(x^2+\sqrt{x^4+3x^2}\right)}{x^2+\sqrt{x^4+3x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{x^2+\sqrt{x^4+3x^2}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

   - Levinud viga on siin järgmine tegevus:

     $$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4+3x^2}\right) = \infty - \infty \overbrace{=}^{EI\;KEHTI} 0,$$

     on vale, kuna $\infty-\infty$ on määramata suurus. Näiteks, kui $2x$ ja x lähenevad lõpmatusse, siis analoogilise analüüsiga $2x - x \to \infty - \infty$, aga tegelikult $2x - x = x \to \infty$.

- Teine levinud viga:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4+3x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\left(1-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)=\infty\cdot(1-1)=\infty\cdot 0\overbrace{=}^{EI\ KEHTI}0,$$

ei kehti, kuna $\infty\cdot 0$ on määramata suurus. Võtke näiteks kolm erinevat juhtu:

$$x\cdot\frac{1}{x}\to 1,\quad x^2\cdot\frac{1}{x}\to\infty,\quad x\cdot\frac{1}{x^2}\to 0,\quad x\to\infty.$$

- Null siin kirjutises $\infty\cdot 0$ ei ole niivõrd mitte null ise, vaid nullile lõpmata lähedane arv. Juur asendati ühega, kuid juur ise ei võrdu ühega, see on ühele kuitahes lähedane arv.

b) Lahendus:

$$\lim_{x\to 1}\left(2^{x-1}+\frac{5x-5}{x^2-3x+2}\right)=1+\lim_{x\to 1}\left(\frac{5(x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}\right)=1+\lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x-2}\right)=-4.$$

- Antud juhul võis asi rappa minna, kui üritati lugejast ja nimetajast x kõrgeim aste ette tuua (see idee töötab enamasti, kui meil on protsess $|x|\to\infty$).

c) Ekvivalentsed suurused. Esiteks märgime, et

$$\arcsin(-2x)\sim -2x,\quad \sin(-4x)\sim -4x,\quad x\to 0.$$

Seega

$$\lim_{x\to 0}\frac{7\arcsin^3(-2x)}{x^2\cdot\cos(4x)\cdot\sin(-4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cdot(-2x)^3}{x^2\cdot\cos(4x)\cdot(-4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{14}{\cos(4x)}=14.$$

- Levinuim viga oli siin $\cos(4x)$ asendamine suurusega $4x$, aga viimane on täiesti vale, kuna $\cos(4\cdot 0)=\cos(0)=1$, aga $4\cdot 0=0$.
- Veel oli siin oht ära unustada, et lugejas tuleb $(-2x)$ tõsta kuupi või et arkussiinuse ja siinuse argument tuleb asendada üksühele, s.t. ei saa asendada suurust $arcsin(-2x)$ suurusega x.
- Kui sedalaadi vigu tehti, siis ei olnud võimalik nimetajas vabaneda x astmetest ja tüüpiliselt tekkis piirväärtus suurusest $\frac{1}{x}$, mis tituleeriti lõpmatuseks (viimane on jällegi väär, kuna selles protsessis $x\to 0$ piirväärtust suurusest $\frac{1}{x}$ ei eksisteeri).

3. Leida tuletis $y'(x)$ (3 x 4p = 12p):

a) Ilmutamata seose diferentseerimine muutuja x järgi. Kirjutame esialgu võrrandi välja, rõhutades y sõltuvust muutujast x (kuna otsime tuletist $y'(x)$):

$$\sin(2y(x))+y(x)-x^3\cdot y^2(x)-1=0.$$

Võtame võrduse mõlemast poolest tuletise x järgi,

$$\cos(2y(x))\cdot 2\cdot y'(x)+y'(x)-3x^2\cdot y^2(x)-x^3\cdot 2\cdot y(x)\cdot y'(x)=0.$$

Edasi jääb $y'(x)$ kordajad kokku koguda ja tulemus avaldada:

$$y'=\frac{3x^2\cdot y^2}{2\cos(2y)-2x^3\cdot y+1}.$$

- Levinuim viga oli muidugi võrrandist tuletise võtmine, aga jättes liitfunktsiooni tuletist korrutamata liikmega y'.
- Teine viga oli y konstandiks lugemine.
- Kolmas levinud viga oli juba alguses kirjutada, et $y'(x) = \ldots$, kus kolme punkti asemel üritati siis mingit tuletise võtmise reeglite virr-varri omavahel ühendada. Tegemist on ikkagi võrrandiga, me võtame tuletise võrrandi mõlemast poolest, kusjuures võrdus säilib.
- Kõige lootusetum oli siin muidugi y enda avaldamine esialgsest võrrandist.

b) Liitfunktsioon arkusfunktsioonist. Lahendus:

$$\frac{d}{dx}\left(\arcsin^5(1-3x)+3\pi^4\right) = 5\arcsin^4(1-3x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(1-3x)^2}}\cdot(-3).$$

- Levinuim viga oli $\arcsin(1-3x)$ tuletise kirjutamata jätmine või siis mitte teadmine (vale avaldise pakkumine, kuid see viimane oli parem kui mittemidagi).
- Veel võis ära ununeda 5-nda astme polünoomi tuletise kasutamine või siis $(1-3x)$ tuletisega korrutamine.
- Aeg-ajalt astutakse ka sellise reha otsa, kus konstandist $3\pi^4$ üritatakse nullist erinevat tuletist saada.

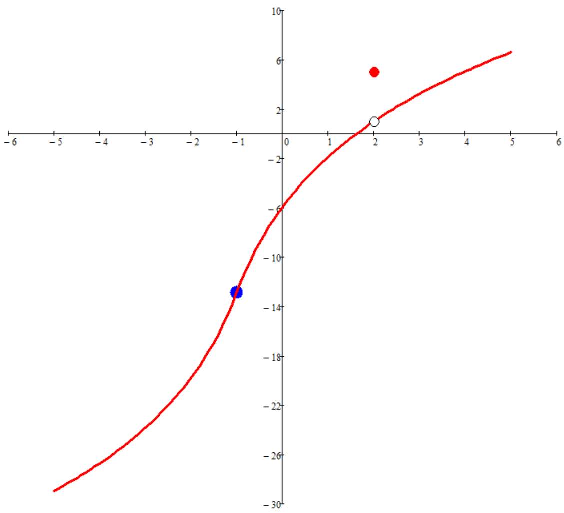
c) Jagatis ja eksponentfunktsioon. Lahendus:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4x^2+4}-e^{3x^2+1}\right) = \frac{4x^2+4-8x^2}{16\,(x^2+1)^2}-6x\cdot e^{3x^2+1}$$

- Levinuim viga oli $\arcsin(1-3x)$ tuletise kirjutamata jätmine või siis mitte teadmine (vale avaldise pakkumine, kuid see viimane oli parem kui mittemidagi).
- Veel võis ära ununeda 5-nda astme polünoomi tuletise kasutamine või siis $(1-3x)$ tuletisega korrutamine.
- Aeg-ajalt astutakse ka sellise reha otsa, kus konstandist $3\pi^4$ üritatakse nullist erinevat tuletist saada.

4. Visandada skemaatiliselt sellise funktsiooni $f(x)$ graafik millel on kõik järgmised omadused (6 x 1p = 6p):

- a) Funktsioon on määratud kõikjal lõigul $[-5,5]$. Selles osas unustati tihti ära, et ka katkevuspunktis pidi funktsioon olema määratud.
- b) Funktsioon on pidev lõigul $[-5,5]$, välja arvatud punktis $x = 2$. See oli üldjuhul hästi tehtud. Kui teha astmeline katkevus, siis läheme vastuollu järgmise piirväärtuse nõudmisega.
- c) Funktsiooni piirväärtus protsessis $x \to 2$ on võrdne ühega. Seega ei tohi funktsioonil olla nn. „treppi“.
- d) Funktsioonil on olemas käänupunkt punktis $P(-1, f(-1))$. Kumerus ja nõgusus peavad vahetama kohad.
- e) $f'(x) > 0$, $x \in [-5,0)$, s.t. funktsioon peab olema kasvav.
- f) $f''(x) < 0$, $x \in (-1,2)$, s.t. funktsioon peab olema kumer.



5. Kuldne juveliir valmistab täidetud kuubikujulisi kõrvarõngaid, mille külg on 5 mm ja mille materjali kulu on 250 eurot ühe kuubi kohta. Leida ligikaudu diferentsiaali abil, kui palju odavamalt on võimalik toota, kui vähendada külge 0.4 mm? (4p).

   Lahendus. Esiteks märgime, et ruumala $V = a^3$ ja ühe kuupmillimeetri tootmishind on

$$\frac{250\,EUR}{5^3\,mm^3} = \frac{250\,EUR}{125\,mm^3} = 2\frac{EUR}{mm^3}.$$

   Edasi ... Vastuse leidmiseks peame leidma ruumala muudu ΔV. Selle asemel leiame diferentsiaali ($\Delta V \approx dV$):

$$dV(a) = V'(a)\cdot da = (a^3)'\cdot da = 3a^2\cdot da.$$

   Pannes arvud asemele, saame

$$dV = 3\cdot 25\cdot(-0.4) = -30\,mm^3.$$

   Kokku on võimalik odavamalt toota $30\cdot 2 = 60$ eurot tükk.

   - Siin oli võimalik ka leida otse ruumala muut

$$\Delta V = 25^3 - 24.6^3,$$

     kuid seda on suhteliselt keeruline leida ja vead on lihtsad tulema.
   - Üks levinud viga oli see, kui parandaja ei saanud aru, mida töös leida üritati.