

## MTMM.00.188 Kõrgem matemaatika, 1. kontrolltöö teemad 2014

1.-6. praktikumi ja 11. loengu materjali peale. Loengutest 1.-10. eeldatakse siiski põhimõistete ja põhireeglite teadmist (omaduste rakendamist). Täpseid definitsioone, teoreemide sõnastusi ja teoreetilisi tõestusi ei küsita.

Allolevad näited ei illustreeri ülesannete lihtsust ega keerukust, vaid ülesannete põhitüüpe.

NB! Taskuarvuti ja muude elektrooniliste abivahendite kasutamine ei ole kontrolltöö ajal lubatud.

### 1.1 Kompleksarvud

Praktikumid **1** ja **2**, vt. ka loengud 1 ja 3.

1. Algebraalne, geomeetriline, trigonomeetriline ja eksponentkuju. Teisendamine ühest kujust teise.
2. Tehted kompleksarvudega (vastavas kujus).
3. Kompleksarvu astendamine, de Moivre'i valem.
4. Kompleksarvu juurimine.

**Näide.** Leida kompleksarvu  $z = 2 \cdot (\cos(60^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ))$  viies aste ja viia tulemus algebralisele kujule. Kujutada tulemus graafikul.

**Näide.** Olgu  $z_1 = 3 - 2i$  ja  $z_2 = -5 + 7i$ . Leida nende arvude moodulid, kaaskompleksid ning soorita tehted  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$  ja  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**Näide.** Leida kompleksarvude  $z_1 = 27 e^{i \cdot \pi/2}$  ja  $z_2 = -8$  kõik kolmanda astme juured ja kujutada tulemus komplekstasandil.

### 1.2 Funktsiooni piirväärtuse arvutamine

Praktikumid **3** ja **4**, vt. ka loengud 5 ja 6.

1. Piirväärtus elementaarfunktsioonidest.
2. Piirväärtus polünoomide jagatisest, määramatus tüüpi  $\frac{0}{0}$  või  $\frac{\infty}{\infty}$ . L'Hospital'i reeglit võib kasutada, kui oskate.
3. Piirväärtus tüüpi  $\infty - \infty$ , näiteks kahe juure vahest.
4. Ekvivalentsete suuruste asendamine, omaduste  $\sin(x) \sim x$ ,  $\tan(x) \sim x$  kasutamine protsessis  $x \rightarrow 0$ .
5. Piirväärtus hääbuva ja tõkestatud funktsiooni korrutisest.

**Näide.** Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( 2^{x-1} + \frac{5x-5}{x^2-3x+2} \right).$$

**Näide.** Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 - \sqrt{x^4 + 3x^2} \right).$$

**Näide.** Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \tan^3(2x)}{x^2 \cos(4x) \sin(-4x)}.$$

**Näide.** Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin(3x)}{x^3 + 2x} + \frac{3}{x} \right).$$

### 1.3 Funktsiooni tuletise arvutamine

Praktikumid 5 ja 6, vt. ka loengud 7 ja 9.

1. Elementaarfunktsioonide tuletis (kaasaarvatud tehted, liitfunktsiooni tuletis).
2. Kõrgemat järku tuletis.
3. NB! Tuletiste tabelit peab peast teadma, ka arkusfunktsioonide tuletisi. Töösse ei tule hüperboolseid funktsioone.
4. Ilmutamata kujul antud funktsiooni diferentseerimine.
5. Parameetrilisel kujul antud funktsiooni I tuletise  $y'(x)$  leidmine.

**Näide.** Leida tuletis funktsioonist

$$f(x) = \frac{x}{4x^2 + 4} - e^{3x^2 + 1}.$$

**Näide.** Leida tuletis funktsioonist

$$f(x) = \ln(3) - x \arcsin^3(4x + 5).$$

**Näide.** Leida tuletis  $y'(x)$ , kui

$$\sin(2y) + y - x^3 y^2 = 7.$$

**Näide.** Osake liigub ajas  $t$  mööda joont

$$x = \sin(\pi/4 \cdot t) + \sqrt{2t}, \quad y = t^3 - 5t.$$

Leida joone puutujasirgetõus  $y'(x)$  hetkel  $t = 2$ .

### 1.4 Funktsiooni tuletise rakendused

Praktikumid 5 ja 6, vt. ka loengud 7 ja 9.

1. Tuletise seos kiiruse ja kiirendusega.
2. Joone puutujasirge tõusu leidmine ja puutujasirge võrrandi koostamine. Paralleelsed puutujad. Puutuja normaali ei küsita.
3. Funktsiooni minimaalsete ja maksimaalsete väärtuste leidmine (praktikumi ülesanded tüüpi 6.13-6.16, viimased on küll veidi keerulisemad, kui töösse võib tulla). Siin on kõige tähtsam teada, et peame leidma  $x$  väärtused, mille korral  $f'(x) = 0$ . Võrrandi koostamine tekstülesannetes sõltub suuresti enda nutikusest.
4. Lihtsam tekstülesanne kiiruste kasutamise peale (praktikumi ülesanded 5.12, 5.15, 6.10, 6.12. Võrrandi tüüp on seotud kolmnurga, ruudu, kuubi, ringjoone või sfääriga). Otsitud kiiruse saab võrrandisse tekitada pärast mõlema poole diferentseerimist ja vajaliku diferentsiaaliga jagamist.

**Näide.** Koostada joone  $y = x^3 - x + 18$  puutujavõrrand punktis  $A(20, 14)$ .

**Näide.** Millises punktis on joone  $y = 4x^3 - 16x^2 + 1$  puutuja paralleelne  $x$ -teljega?

**Näide.** Talumehel on 400 meetrit võrkaeda. Kui suure ristkülikukujulise ala saab ta maksimaalselt sellega piirata?

**Näide.** Milline on joone  $y = 6x^2 - x^3$  maksimaalne puutujatõus ja millise  $x$  väärtuse korral see saavutatakse?

**Näide.** Kerakujulisse õhupalli pumbatakse õhku fikseeritud kiirusega  $5 \text{ cm}^3/\text{min}$ . Kui kiiresti suureneb kera raadius  $r$  hetkel, kui  $r = 10 \text{ cm}$ ?

**Näide.** 24 meetri kõrguse hoone varju pikkus kasvab maapinnal kiirusega  $18 \text{ cm}/\text{min}$ . Kui kiiresti kasvab varju tippu ja hoone kõrguse vaheline vahemaa hetkel, kui vari on 18 meetrit pikk?

## 1.5 Funktsiooni diferentsiaal ja selle rakendused

Praktikum 6, vt. ka loeng 8.

1. Funktsiooni diferentsiaali leidmine.
2. Funktsiooni diferentsiaali graafiline esitus.
3. Funktsiooni muudu  $\Delta y$  ligikaudne arvutamine.
4. Maksimaalse absoluutse vea ligikaudne leidmine ( $x$  mõõdetakse,  $y = y(x)$  arvutatakse).

**Näide.** Leida funktsiooni  $y = (x^2 + 1)^2$  diferentsiaal punktis  $x = 1$ , kui  $\Delta x = -0.01$ . Näidata jooniselt, millise sirglõigu pikkus kujutab endast leitud diferentsiaali väärtust.

**Näide.** Arvutada ligikaudu, kui palju väheneb kera ruumala, kui raadiust vähendada 15.00 cm-lt 14.75 cm-ni.

**Näide.** Kullaga kaetud kuubi serv mõõdetakse täpsusega 3 cm  $\pm$  0.5 mm. Kui suue vea võib teha vajamineva kulla koguse (kuubi pinna pindala) arvutamisel?

## 1.6 Funktsiooni esimese ja teise tuletise omadused

Loeng 11.

1. Millal funktsioon on kasvav ja millal kahanev.
2. Mida tähendab  $f'(x) = 0$ .
3. Millal funktsioon on kumer ja millal nõgus.
4. Funktsiooni käänupunkt.

**Näide.** Visandada skemaatiliselt sellise funktsiooni  $y = f(x)$  graafik, millel on kõik järgmised omadused:

1.  $f$  on määratud kõikjal lõigul  $[-5, 5]$ ;
2.  $f$  on pidev lõigul  $[-5, 5]$ , välja arvatud punktis  $x = 2$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ;
4. käänupunkt on punktis  $P(-1, f(-1))$ ;
5.  $f'(x) > 0$ , kui  $x \in [-5, 0]$ ;
6.  $f''(x) < 0$ , kui  $x \in (-1, 2)$ .

Töösse ei tule kõiki ülesandeid korraga. Tekstülesannete osakaal ei ületa 20% punktidest.