Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

14 Riemann'i integraal (määratud integraal)

Sisukord

Kontrolltöö teemad

1. Riemann'i integraali omadused.
2. Newton'i-Leibniz'i valem.
3. Kõvertrapets ja selle pindala leidmine.

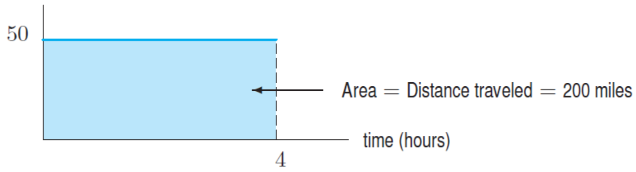
Eksamiteemad

1. Riemann'i integraali definitsioon ja peab oskama seda kasutada konstantse funktsiooni korral (näide 15.1).
2. Riemann'i integraali omadused.
3. Newton'i-Leibniz'i valem.
4. Kõvertrapets ja selle pindala leidmine.
5. Integraalarvutuse keskväärtusteoreem ja kuidas leida funktsiooni keskmist väärtust üle lõigu.

14.1 Sissejuhatus

Alustame kõigepealt näitest ja hiljem anname Riemann'i integraali jaoks täpse definitsiooni. Vaatleme maanteel liikuvat autot, mille kiirus on igal ajahetkel t kirjeldatav funktsiooniga $v = v(t)$.

Kui liikumine on ühtlase kiirusega, siis läbitud teepikkus võrdub kulutatud aeg korda (keskmine) kiirus $s = v \cdot \Delta t$. Paneme tähele, et tegemist on samal ajal ristküliku pindalaga, kus aluseks on Δt ja funktsiooni kõrguseks v.



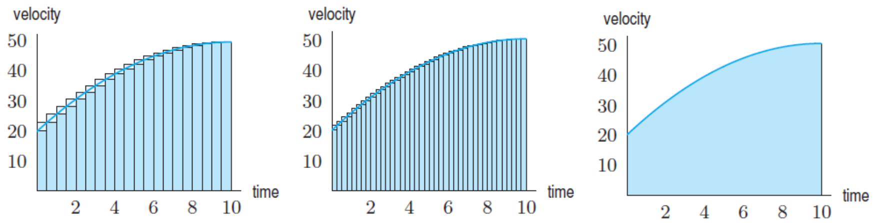
Allikas: [3]

Olgu järgnevalt kiirus ebaühtlane. Vaatleme ajavahemikku $[0, T]$ ja konkreetsemalt üksikuid ajahetki

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} =< t_n = T, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sel juhul tekivad väikesed ajaintervallid $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Kui need ajaintervallid on piisavalt väikesed, siis võib kiirusi üle nende intervallide lugeda konstantseks ja läbitud teepikkus avaldub ligikaudselt

$$s(t_i) - s(t_{i-1}) \approx v(t_{*_i}) \cdot \Delta t_i, \quad t_{*_i} \in [t_{i-1}, t_i].$$



Allikas: [3]

ajahetk	intervall	kulunud aeg	ligikaudne teepikkus	tegelik teepikkus
t_{*_1}	$[t_0, t_1]$	Δt_1	$v(t_{*_1}) \cdot \Delta t_1$	$s(t_1) - s(t_0)$
t_{*_2}	$[t_1, t_2]$	Δt_2	$v(t_{*_2}) \cdot \Delta t_2$	$s(t_2) - s(t_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_{*_n}	$[t_{n-1}, t_n]$	Δt_n	$v(t_{*_n}) \cdot \Delta t_n$	$s(t_n) - s(t_{n-1})$
			$\sum v(t_{*_i}) \cdot \Delta t_i$	$\sum = s(t_n) - s(t_0)$

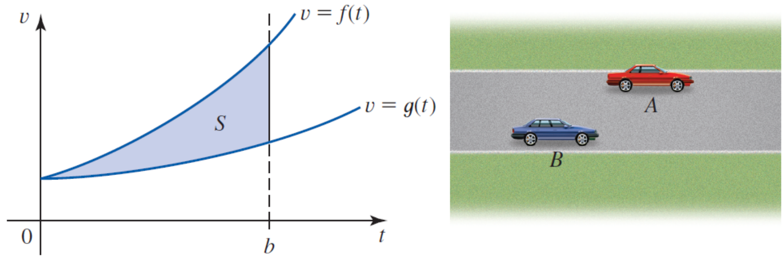
Eelnevast mäletame, et kiiruse $v(t)$ algfunktsiooniks on läbitud teepikkus $s(t)$. Minnes ajaintervallide lisamisel piirile $n \to \infty$, saaksime

$$\lim_{\substack{\Delta t_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} v(t_{*_i}) \cdot \Delta t_i = s(t_n) - s(t_0).$$

Viimasena saadud piirväärtust summast $\sum_{i=1}^{n} v(t_{*_i}) \cdot \Delta t_i$ nimetataksegi Riemann'i integraaliks ja tähistatakse $\int\limits_0^T v(t)\, dt$. Seega kiiruse graafiku $v(t)$ ja ajatelje vahele jääva ala pindala on võrdne auto poolt läbitud teepikkusega $s(T) - s(0)$:

$$\int\limits_0^T v(t)\, dt = s(T) - s(0).$$

Vaatleme nüüd maanteel liikumas kahte autot, millest esimese auto kiirus igal hetkel t on $f(t)$ ja teise auto kiirus on $g(t)$. Olgu lihtsuse mõttes mõlemad kiirused positiivsed.



Allikas: [7]

Sellisel juhul esimese auto poolt läbitud teepikkuse saab arvutada funktsiooni $f(t)$ graafiku ja ajatelje vahele jääva ala pindala kaudu,

$$s_1(T) - s_1(0) = \int\limits_0^T f(t)\, dt,$$

ja analoogiliselt teise auto poolt läbitud teepikkuse

$$s_2(T) - s_2(0) = \int\limits_0^T g(t)\, dt.$$

Joonisel toodud märgitud pindala S näitab seda, kui pikalt on üks auto teisest ees (või taga). Selle pindala (antud juhul samas ka autode vaheline kaugus) saab arvutada integraalide abil:

$$S = \int\limits_0^T (f(t) - g(t))\, dt.$$

Kui tulemus on negatiivne, siis on teine auto esimesest ees pool.

14.2 Riemann'i integraal

Olgu lõigus $[a, b]$ antud funktsioon $y = f(x)$. Teeme lõigu $[a, b]$ alajaotuse

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{14.1}$$

valime igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ suvaliselt ühe punkti

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \tag{14.2}$$

ja olgu maksimaalne osalõikude $[x_{i-1}, x_i]$ pikkus

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i. \tag{14.3}$$

Definitsioon 14.1

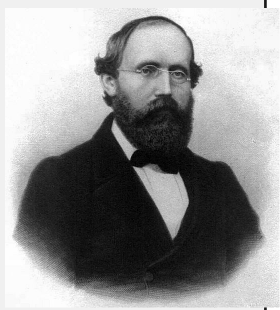
Kui sõltumata lõigu $[a, b]$ alajaotusest $x_0, \ldots, x_n$ ja punktide $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ valikust eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = I, \tag{14.4}$$

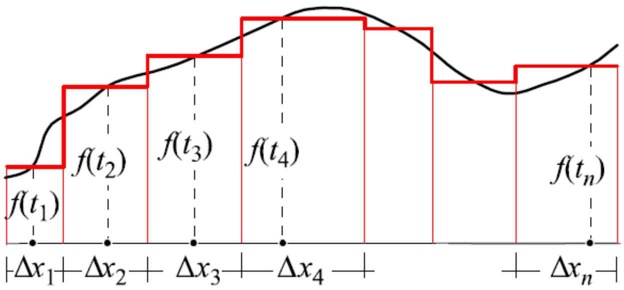
siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni määratud (Riemann'i) integraaliks lõigus $[a, b]$. Määratud integraal tähistatakse $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, seega

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \tag{14.5}$$

Riemann'i integraali nimi tuleb saksa matemaatiku Georg Friedrich Bernhard Riemann'i (1826-1866) järgi.



Allikas: Wikipedia



Allikas: [5]

Riemann'i integraal on lihtsustatult (lõpmata) väikeste ristkülikute pindalade summa piirväärtus.

Näide 14.1 Näitame definitsiooni põhjal, et konstantne funktsioon $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, on suvalises osalõigus $[a, b]$ integreeruv Riemann'i mõttes (vt. [6]).

Olgu $f(x) = c$ iga $x \in [a, b]$ korral. Vaatleme lõigu $[a, b]$ suvalist jaotusviisi

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sõltumata lõigu jaotusviisist ja punktide ξ_i valikust osalõikudes $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, saame

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c \cdot \Delta x_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c \cdot (b - a).$$

Seega

$$\int\limits_a^b c\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = c \cdot (b - a).$$

◇ ◇ ◇

Intagraali rakendustes näeme, et integraal tähistab funktsiooni joone ja x-telje vahele jääva kujundi pindala. Pindala leidmisega sidusid integraali mõiste ka Newton ja Leibniz.

Leibniz kasutas algul integraali tähistamiseks sümbolit "omn." sõnast *omnia* (summa, ladina keeles). Hiljem muutis Leibniz tähise väljavenitatud s-ks: $\int$ (sõnast summa).

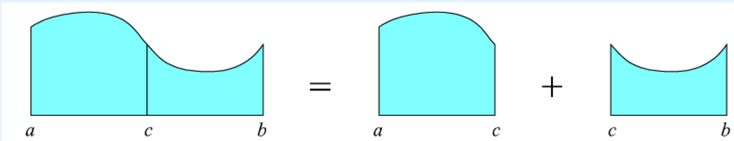
Newton süstemaatilist mõistet integraalide tähistamiseks ei kasutanud.

14.3 Määratud integraali omadused

Kõigis järgnevates omadustes eeldame vaadeldavate integraalide olemasolu vastavas lõigus.

1. omadus. Kehtib seos
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{14.6}$$

2. omadus (aditiivsus). Kehtib seos
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{14.7}$$



Allikas: [5]

3. omadus (lineaarsus). Kehtib seos
$$\int_a^b [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{14.8}$$

4. omadus (monotoonsus). Kui $f(x) \le g(x)$ iga $x \in (a,b)$ korral, siis
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{14.9}$$

Näide 14.2 Olgu $b > a$. Näitame, et iga sellise reaalarvu a ja b puhul kehtib hinnang
$$\int_a^b \sin(x^2)\,dx \le b - a.$$
Tõepoolest, kuna $\sin(y) \le |\sin(y)|$, siis
$$\int_a^b \sin(x^2)\,dx \le \int_a^b |\sin(x^2)|\,dx \le \int_a^b 1\,dx = b - a.$$
◇ ◇ ◇

Teoreem 14.1
Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis ta on integreeruv (Riemann'i mõttes).

Riemann'i nimega on tuntuks saanud Riemann'i hüpotees (seotud zeeta-funktsiooni nullkohtade leidumise probleemiga), mida pole tänini suudetud tõestada. Selle kohta on olemas rida anekdoote.

Matemaatik on aastaid üritanud tõestada Riemann'i hüpoteesi kuid edutult. Ühel päeval sõlmib ta lepingu Saatanaga, kes lubab talle nädala lõpuks tuua tõestuse, kui saab vastu matemaatiku hinge. Matemaatik on väga elevil, saadab laiali pressiteateid, suhtleb telefoni teel, lepib kokku konverentside esinemistes ja on igati meedia tähelepanu orbiidi all.

Nädala lõpp saabub, aga Saatanat pole kusagil. Meedia on väga pettunud ja matemaatik vabandab end väitega, et vajab veel pisut aega. Kuu möödudes ei ole Saatanat endiselt kusagil ja matemaatik satub naerualuseks.

Viimaks, kuus kuud hiljem ilmub välja Saatan. "Kus sa oled olnud?" pärib matemaatik pettunult, "Sa hävitasid terve mu karjääri!". "Väga vabandan, ka mina ei suutnud Riemann'i hüpoteesi tõestada" pomiseb Saatan moka otsast, kuid jätkab vaimustunult: "Aga ma leidsin paar väga huvitavat lemmat!".

14.4 Newton'i-Leibniz'i valem

Teoreem 14.2

Matemaatilise analüüsi 2. põhiteoreem. Kui funktsioonil f on olemas Riemann'i integraal lõigus $[a, b]$ ja algfunktsioon F selles lõigus, siis kehtib Newton'i-Leibniz'i valem

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{14.10}$$

Newton'i-Leibniz'i valemit kasutatakse ka Riemann'i integraalist erineva määratud integraali definitsiooniks. Kui selline integraal leidub, siis räägitakse Newton'i-Leibniz'i integraalist. Meile piisab Riemann'i integraalist ja loeme, et teatud tingimustel kehtib Newton'i-Leibniz'i valem. Viimane ütleb, kuidas saab arvutada Riemann'i integraali nii, et ei peaks lõputult summeerima mingeid lõpmata väikeste pindalaga olevaid ristkülikuid.

Tõestus. Kuna F on funktsiooni f algfunktsioon, siis $F'(x) = f(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral. Algfunktsioon F on pidev lõigus $[a, b]$, kuna ta on diferentseeruv seal. Sellest järeldub, et me saame kasutada Lagrange'i keskväärtusteoreemi.

Enne selle kasutamist moodustame lõigus suvalise jaotuse

$$a = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = b,$$

kuid ikkagi sellise, et $\lambda = \max\limits_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1}) \to 0$, kui $n \to \infty$.

Sel juhul Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal leidub igas osalõigus selline punkt $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, et kehtib võrdus

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Kuna f on integreeruv Riemann'i mõttes, siis leidub definitsiooni järgi piirväärtus

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

sõltumata $x_0, \ldots, x_n$ ja $c_1, \ldots, c_n$ valikust. Seega leidub see sama piirväärtus meie konkreetse jaotuse $x_0, \ldots, x_n$ ja punktide $\xi_1, \ldots, \xi_n$ jaoks. Siit saame

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \left(F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \cdots + F(x_n) - F(x_{n-1})\right)$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \left(F(x_n) - F(x_0)\right) = F(b) - F(a).$$

□

Või siis järgmine lugu kuulsaks saamise teemal.

Matemaatik kutsutakse konverentsile esinema ja tema teema pealkirjaks reklaamitakse "Riemann'i hüpoteesi tõestus." Ettekande lõpuks peavad aga kuulajad kõvasti pettuma, kuna välja kuulutatud tõestuse asemel räägib matemaatik hoopis mingil teisel teemal ja lubatud tõestusest ei sõnagi.

Pärast ettekannet küsitakse tema käest, et kas ta leidis oma tõestuses viimasel hetkel vea, et selle esitusest loobus. "Ei, mul pole seda tõestust kunagi olnudki." "Miks Te siis kuulutasite oma ettekande teemaks Riemann'i hüpoteesi?" päritakse talt armutult. "Vaadake … Kindluse mõttes … juhuks, kui ma peaksin teel konverentsile äkki surema."

Näide 14.3 Leiame

$$\int_1^3 (3x^2 - 4)\,dx = \left(x^3 - 4x\right)\Big|_{x=1}^{x=3} = 27 - 12 - (1 - 4) = 15 + 3 = 18.$$

◇ ◇ ◇

Näide 14.4 Oluline on, et Newton'i-Leibniz'i valemi kasutamisel oleks funktsioon pidev. Vaatame näiteks funktsiooni

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , x \in [0,1] \\ 2 & , x \in [1,2] \end{array} \right\}.$$

Lihtne on näha, et tekkivate kõvertrapetsite pindalad kokku (lõigul $[0,1]$ ja $[1,2]$) on $S = 3$ või ka

$$S = \int\limits_0^2 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 1\,dx + \int\limits_1^2 2\,dx = x\Big|_{x=0}^{x=1} + 2x\Big|_{x=1}^{x=2} = 1 + 2 = 3.$$

Samas kui Newton'i-Leibniz'i valemi vale kasutamisega saaksime

$$\int\limits_0^2 f(x)\,dx \to \left\{ \begin{array}{ll} x & , x \in [0,1] \\ 2x & , x \in [1,2] \end{array} \right\}\Bigg|_{x=0}^{x=2} = 2 \cdot 2 - 0 = 4.$$

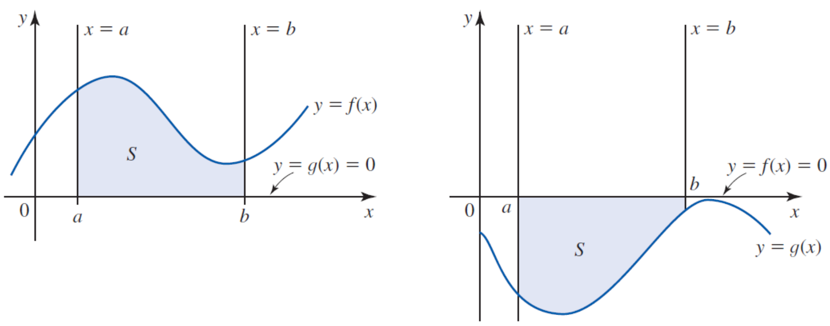
Vastus erineks õigest vastusest. Põhjuseks oli see, et meie funktsioon ei ole pidev lõigus $[0,2]$ ja seega Newton'i-Leibniz'i valem antud juhul ei kehti.

◇ ◇ ◇

14.5 Kõvertrapetsi pindala

Definitsioon 14.2

Me nimetame kõvertrapetsiks funktsiooniga $f(x)$, x-teljega ning püstsirgetega $x = a$ ja $x = b$ piiratud kujundit.



Allikas: [7]

Sellisel juhul x-teljest ülespoole jääva kõvertrapetsi pindala avaldub määratud integraaliga

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{14.11}$$

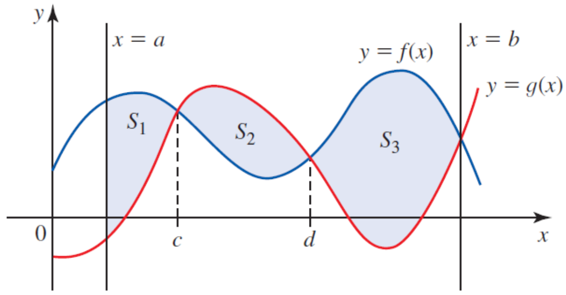
Kui kõvertrapets asub allpool x-telge, siis tuleb pindala miinusmärgiga.

Kui meil on kaks funktsiooni f ja g, mille korral $g(x) \leq f(x)$, $x \in [a,b]$, siis saab f ja g graafikutega piiratud kujundi pindala arvutada valemist

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx. \tag{14.12}$$

Märkus 14.1

Kui f ja g omavahel ristuvad, siis tuleb leida lõikepunktid ja arvutada kogu pindala osade kaupa.

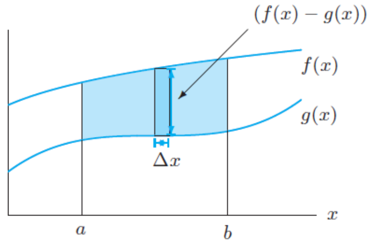


Allikas: [7].

Märkus 14.2

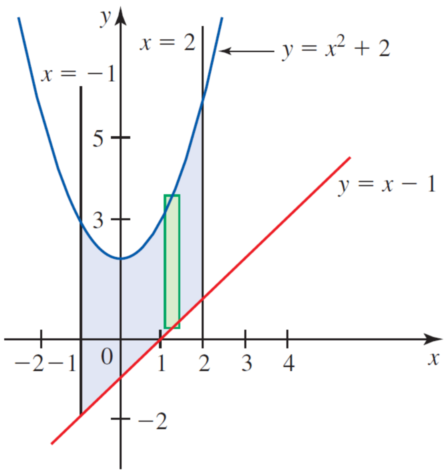
Sõltumata f ja g märgist kehtib alati

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \tag{14.13}$$



Allikas: [3]

Näide 14.5 Arvutame funktsiooniga $f(x) = x^2 + 2$ ja $g(x) = x - 1$ vahele jääva kujundi pindala lõigul $[-1, 2]$.



Allikas: [7]

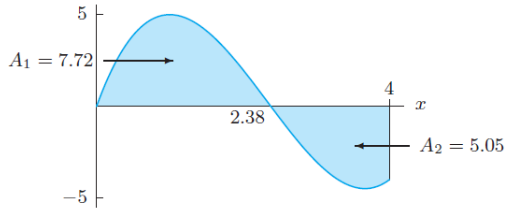
Kirjutame

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} (x^2 + 2 - x + 1)\, dx = \int_{-1}^{2} (x^2 - x + 3)\, dx = \left(\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{x=-1}^{x=2} \\ &= \tfrac{8}{3} - 2 + 6 - \left(-\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - 3\right) = 10.5. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 14.6 Arvutame funktsiooniga $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x$ ja x-teljega eraldatud kujundi pindala lõigul $[0, 4]$.

Esiteks märgime, et antud funktsiooni nullkohtadeks on $x = 0$ ja $\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$, millest lõigu $[0, 4]$ sisse jääb $\frac{7-\sqrt{5}}{2} \approx 2.38$. Lõigul $[0, 2.38]$ on funktsioon positiivne ja ülejäänud osas negatiivne.



Allikas: [3]

Seega

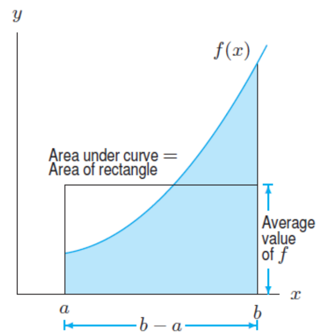
$$S = \int_0^4 |x^3 - 7x^2 + 11x|\,dx \approx \int_0^{2.38} (x^3 - 7x^2 + 11x)\,dx - \int_{2.38}^4 (x^3 - 7x^2 + 11x)\,dx = 7.72 - (-5.05) = 12.77.$$

◇ ◇ ◇

14.6 Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

Teoreem 14.3 **Integraalarvutuse keskväärtusteoreem.** Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis on olemas punkt $c \in [a, b]$, nii et

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a). \tag{14.14}$$



Allikas: [3]

Näide 14.7 Me teame, kuidas leida aritmeetilist keskmist. Selleks tuleb kõik olemasolevad väärtused kokku liita ja jagada väärtuste arvuga. Olgu meil antud 24 tunni vältel täistundidel mõõdetud temperatuurid $f(t_1), \ldots, f(t_{24})$. Sel juhul temperatuuride keskmine on

$$T_{24} = \frac{f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_{24})}{24} = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{24} f(t_i).$$

Kui me teeme rohkem mõõtmisi, aga taheme leida 24 tunni keskmise, siis

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n)}{n} = \frac{24}{24}\frac{f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n)}{n} \\ &= \frac{1}{24}\left[f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n)\right]\frac{24}{n} = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta t, \quad \Delta t = \frac{24}{n}. \end{aligned}$$

Integraalarvutuse keskväärtusteoreemi praktiline rakendus on funktsiooni f keskmise väärtuse leidmine lõigul $[a, b]$.

Näeme, et n kasvades saame Riemann'i integraali üle lõigu [0,24] ja

$$\bar{T} = \frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,dt.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 14.3

Lõigul $[a, b]$ pideva funktsiooni f keskväärtus üle lõigu $[a, b]$ on arvutatav integraaliga

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\, dx. \tag{14.15}$$

Näide 14.8 Olgu elanike arv kirjeldatud funktsiooniga $y = x^2$, x on näiteks aastad. Leiame keskmise elanike arvu esimese viie aasta kestel,

$$\overline{y} = \frac{1}{5-0} \int\limits_0^5 x^2\, dx = \frac{1}{5} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=5} = \frac{125}{15} = \frac{25}{3} = 8.(3).$$

◇ ◇ ◇

Ülesanne 14.1

Olgu $C(t)$ funktsioon, mis näitab sinu maja päevast küttekulu. Olgu $t = 0$ (1. jaanuar 2014). Mida näitab sel juhul suurus

$$\frac{1}{90} \int\limits_0^{90} C(t)\, dt?$$

Viited

[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[3] D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, P. F. Lock, D. E. Flath. Applied Calculus. Wiley, 2010.

[4] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross, 1997-98.

[5] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.

[6] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[7] S. T. Tan. Single Variable Calculus. Brooks/Cole 2010.

[8] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.

[9] A. J. Washington. Basic Technical Mathematics with Calculus. 10th ed. Pearson, 2014.