

15 Määratud integraali rakendusi

Sisukord

15 Määratud integraali rakendusi	173
15.1 Teepikkuse arvutamine	174
15.2 Kõvertrapetsi pindala	174
15.3 Kõversektori pindala	176
15.4 Joone kaare pikkuse arvutamine	177
15.5 Töö arvutamine	180
15.6 Pöördkeha ruumala	181
15.7 Keha ruumala	185
15.8 Pöördkeha pinna pindala *	186
15.9 Masskeskme leidmine *	186

Kontrolltöö teemad

1. Oskama arvutada teepikkust ja nihet.
2. Oskama arvutada kõvertrapetsi ja kõversektori pindala.
3. Oskama lihtsamal juhul arvutada joone kaare pikkust.
4. Oskama leida keha liigutamiseks tehtud tööd.
5. Oskama lihtsamal juhul arvutada keha ruumala.

Eksamiteemad

1. Oskama arvutada teepikkust ja nihet.
2. Kõversektori mõiste.
3. Oskama arvutada kõvertrapetsi ja kõversektori pindala.
4. Parameetriselt antud joone aluse pindala valemi tuletamine lähtudes kõvertrapetsi pindala valemist.
5. Töö arvutamise valemi tuletamine
6. Oskama lihtsamal juhul arvutada joone kaare pikkust.
7. Oskama leida keha liigutamiseks tehtud tööd.
8. Oskama lihtsamal juhul arvutada keha ruumala, keha ruumala valem.

15.1 Teepikkuse arvutamine

Olgu s keha poolt läbitud teepikkus ja Δs nihe (kaugus algpunktist).

Nagu Riemann'i integraali sissejuhatuses nägime, saab teepikkust arvutada positiivse kiirusfunktsiooni $v(t)$ integreerimise teel, liites üksikud osalõikude pikkused $\Delta s(t_i) = v(t_{*i}) \cdot \Delta t_i$:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t}, \quad \Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}. \quad (15.1)$$

Kui kiirus v on kõikjal positiivne, siis $s = \Delta s$.

Näide 15.1 Keha liikumise kiirus on antud võrrandiga

$$v(t) = (3t^2 - t + 2) \frac{m}{s}.$$

Leida keha poolt läbitud teepikkus aja $t = 3$ sekundi ja $t = 6$ sekundi vahel. Arvestades eelnevat, siis

$$s = \int_3^6 |3t^2 - t + 2| \, dt = \left(t^3 - \frac{t^2}{2} + 2t \right) \Big|_{t=3}^{t=6} = 181.5 \, m.$$

◇ ◇ ◇

Näide 15.2 Analoogiliselt saab leida teisi karakteristikuid, kui on antud mingi suuruse muutumise kiirus $y = f'(x)$ teise suuruse x järgi. Sel juhul algfunktsiooniks on funktsioon $f(x)$ ise ja $f(b) - f(a)$ annab funktsiooni f muudu.

Bakterite koloonia on alguses 14 miljoni bakteri suurune. Mudel näitab, et t tunni jooksul suureneb koloonia kiirusega 2^t miljonit bakterit tunnis. Leida bakterite arv hetkel $t = 2$. Bakterite arvuks saame sel juhul

$$n = 14 + \int_0^2 2^t \, dt = 14 + \left(\frac{2^t}{\ln(2)} \right) \Big|_{t=0}^{t=2} = 14 + \frac{4}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} \approx 18.33.$$

◇ ◇ ◇

15.2 Kõvertrapetsi pindala

Eelmises loengus nägime, et lõigus $[a, b]$ positiivse ja pideva funktsiooni $y = f(x)$ poolt määratud kõvertrapetsi pindala arvutatakse valemiga

$$S = \int_a^b f(x) \, dx. \quad (15.2)$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus funktsioon on antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (15.3)$$

kus φ on diferentseeruv funktsioon, mis teisendab lõigu $[\alpha, \beta]$ lõiguks $[a, b]$ nii, et $\varphi(\alpha) = a$ ja $\varphi(\beta) = b$. Teeme integraalis $\int_a^b f(x) dx$ muutujavahetuse

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt.$$

Sel juhul saame kõvertrapetsi pindala valemist,

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Parameetriliselt antud võrranditega tekkiva kõvertrapetsi pindala avaldub valemiga

$$\mathbf{S} = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (15.4)$$

Näide 15.3 Leiame tsükloidi

$$\begin{cases} x = r(t - \sin(t)) \\ y = r(1 - \cos(t)) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad r > 0,$$

pindala. Tsükloid on joon, mille tekitab raadiusega r ringjoone veeremine (fikseerides ringjoonel ühe punkti ja jälgides selle trajektoori). Märgime, et tsükloid asub ülalpool x -telge ja kõvertrapetsi pindala leidmisel märgiprobleeme ei ole.



Allikas: Wikipedia

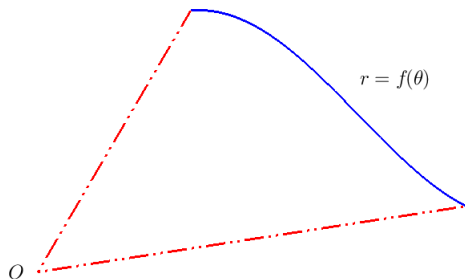
Esiteks $\varphi'(t) = r(1 - \cos(t))$. Seega

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos(t)) r(1 - \cos(t)) dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) dt = r^2(t - 2\sin(t)) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} + r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt \\ &= 2\pi r^2 + r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [1 + \cos(2t)] dt = 2\pi r^2 + r^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin(2t) \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 3\pi r^2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

15.3 Kõversektori pindala

Vaatleme kõversektorit, mille moodustavad nullpunktist tõmmatud nurkade-
ga α ja β seotud sirged ning pidev mittenegatiivne funktsioon $r = f(\theta)$, kus
 θ on nurk radiaanides. Siinjuures $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$.



Lause 15.1

Pideva funktsiooniga $r = f(\theta)$ määratud kõversektori pindala avaldub kujul

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta, \quad (15.5)$$

kus θ on nurk radiaanides.

Tõestus. Täpse tõestuse leiab näiteks õpikust [5]. Anname siinkohal skeemi. Esiteks märgime, et ringi sektori pindala leitakse valemiga $\frac{1}{2} \theta r^2$. Jagame lõigu $[\alpha, \beta]$ osalõikudeks

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Moodustame nurkade muudud $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Võtame igas osalõigis ühe kindla nurga $\theta_{*i} \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ (radiaanides). Sel juhul tekib osasektor, mille pindala arvutatakse ligikaudu ringi sektori pindala kaudu

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} f^2(\theta_{*i}) \cdot \Delta\theta_i.$$

Võtame $\lambda = \max_{i=1, \dots, n} \Delta\theta_i$ ja moodustame standardselt Riemann'i summa ja vastava piirväärtuse

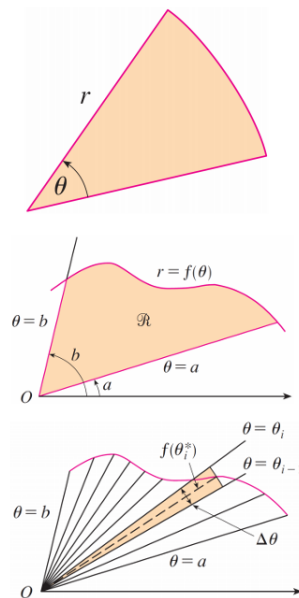
$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\theta_{*i}) \cdot \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

□

Näide 15.4 Teeme seekord ühe keerulisema näite, s.t. vaatleme polaar-
koordinaatides antud joont (okassiga)

$$r(\varphi) = \cos(44\varphi) + 2 \sin(\varphi), \quad \varphi \in [0, \pi]. \quad (15.6)$$

Harilik ringi sektor ja kõversektor.



Allikas: [8]

Kõversektor on kõvertrapetsi analoog polaarkoordinaatide jaoks.

Pindala leidmiseks kasutame kõversektori pindala valemit,

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(44\varphi) + 2\sin(\varphi)]^2 d\varphi. \quad (15.7)$$

Siit saame

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos^2(44\varphi) + 4\sin^2(\varphi) + 4\cos(44\varphi)\sin(\varphi)] d\varphi. \quad (15.8)$$

Kasutame järgmisi trigonomeetrilisi abivalemeid:

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x) \Rightarrow \cos^2(44\varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(88\varphi)), \quad (15.9)$$

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x) \Rightarrow 4\sin^2(\varphi) = 2(1 - \cos(2\varphi)), \quad (15.10)$$

lisaks,

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2} \Rightarrow \quad (15.11)$$

$$4\cos(44\varphi)\sin(\varphi) = 2[\sin(45\varphi) - \sin(43\varphi)]. \quad (15.12)$$

Võttes kõik kokku, saame

$$S = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 + \cos(88\varphi)) d\varphi + \int_0^{\pi} (1 - \cos(2\varphi)) d\varphi + \int_0^{\pi} \sin(45\varphi) d\varphi - \int_0^{\pi} \sin(43\varphi) d\varphi. \quad (15.13)$$

Integreerime,

$$S = \frac{5}{4}\pi + \left[\frac{\sin(88\varphi)}{4 \cdot 88} - \frac{\sin(2\varphi)}{2} - \frac{\cos(45\varphi)}{45} + \frac{\cos(43\varphi)}{43} \right]_0^{\pi} = \frac{5}{4}\pi. \quad (15.14)$$

Saime vastuseks

$$S = \frac{5}{4}\pi \approx 3.927. \quad (15.15)$$

◇ ◇ ◇

15.4 Joone kaare pikkuse arvutamine

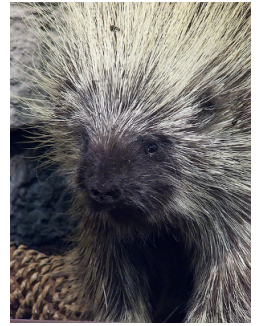
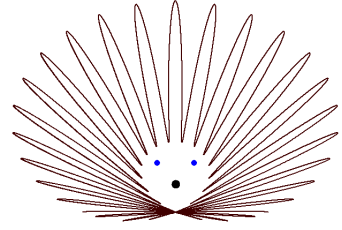
Tuletame valemi funktsiooni $y = f(x)$ joone kaare pikkuse arvutamiseks.

Võtame lõigus $[a, b]$ alajaotuse

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Ühendame funktsiooni väärtused $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ sirglõikudega.

Joonisel kujutab see joon endast okkad turri ajanud okassiga (tõsi, eks me lisanud sinna veel paar täpikest ...).



Sel juhul täisnurksest kolmnurgast saame selliste sirglõigukeste pikkusteks

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}.$$

Summeerime kõik need lõigukesed,

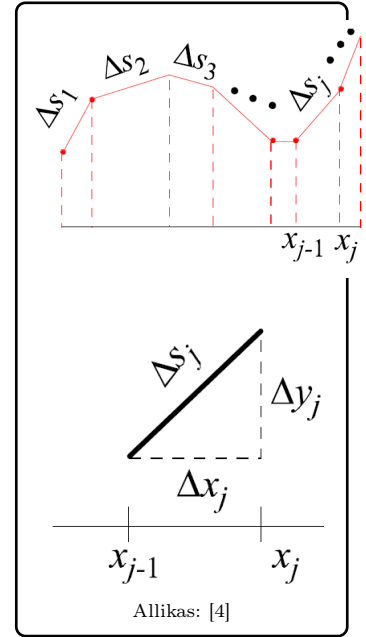
$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i.$$

Jagatis $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \tan \alpha_i = f'(x_{i-1})$. Minnes piirile $n \rightarrow \infty$, saame järgmise tulemuse.

Lause 15.2

Lõigus $[a, b]$ pideva ja vahemikus (a, b) diferentseeruva funktsiooni f joone kaare pikkus avaldub valemiga

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (15.16)$$



Lause 15.3

Kui joon on esitatud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (15.17)$$

kus φ ja ψ on diferentseeruvad lõigus $[\alpha, \beta]$, siis joone kaare pikkus avaldub valemiga

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (15.18)$$

Näide 15.5 Joone kaare pikkuse leidmisel tekitavad tavaliselt väga keerulist tüüpi integraalid ja sellepärast leitakse need tihti ligikaudsete vahenditega. Vaatleme lihtsa näitena poolringjoone

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r],$$

pikkuse leidmist. Leiame tuletise

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Seega poolringjoone pikkus avaldub

$$s = \int_{-r}^r \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_{-r}^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx.$$

Teeme muutujavahetuse

$$x = r \sin(t), \quad dx = r \cos(t) dt, \quad t = \arcsin \frac{x}{r}.$$

Siit

$$\begin{aligned} s &= r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{r^2 - (r \sin(t))^2}} r \cos(t) dt = r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}} \cos(t) dt \\ &= r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \pi r. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 15.6 Leiame kardioidi joone pikkuse ehk siis ka ligikaudse “Euroõuna” ümbermõõdu (mõõdetuna keskelt ja arvestades varre osas olevat õõnsust).

Selleks kasutame parameetriselt antud funktsiooni joone kaare pikkuse valemit. Kardioidi valemitest

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi \\ y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (15.19)$$

saame

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[-a(1 + 2 \cos \varphi) \sin \varphi]^2 + [a(\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)]^2} d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + 2 \cos \varphi)^2 \sin^2 \varphi + [(1 + 2 \cos \varphi) \cos \varphi - 1]^2} d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{[(1 + 2 \cos \varphi) - \cos \varphi]^2 + 1 - \cos^2 \varphi} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)} d\varphi = 4a \int_0^{2\pi} \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2}\right) \right| d\left(\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned} \quad (15.20)$$

Teeme muutujavahetuse $u = \frac{\varphi}{2}$ ning arvestades funktsioonide $\cos x$ ja $-\cos x$ sümmeetriat lõigul $[0, \frac{\pi}{2}]$ ja $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ saame

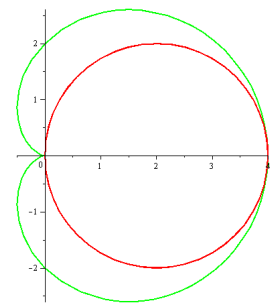
$$s = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 8a \sin u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a(1 - 0) = 8a. \quad (15.21)$$

Kardioidi ümbermõõt

$$s = 8a \quad (15.22)$$

on sama raadiusega ringi omast veidi suurem (ringi ümbermõõt on $2\pi a \approx 6,28a$ ehk pisut rohkem kui kolmveerand kardioidi ümbermõõdust).

◇ ◇ ◇



15.5 Töö arvutamine

Vaatleme keha, mis liigub mööda x -telge positiivses suunas välise jõu $F(x)$ poolt punktist $x = a$ punkti $x = b$. Olgu jõufunktsioon F pidev.

Moodustame juba varem korduvalt vaadeldud jaotuse

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ võtame punkti c_i , milles arvutame jõu $F(c_i)$. Kui osalõigud $[x_{i-1}, x_i]$ on küllalt väikesed, siis võime lugeda jõu F selles osalõigus konstantseks. Töö W_i , mida tehakse konstantse jõu $F(c_i)$ poolt, liigutades keha edasi Δx_i võrra, leitakse korrutisena

$$W_i \approx F(c_i) \cdot \Delta x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kogu töö leitakse ligikaudselt Riemann'i summana

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

Minnes osalõikude arvuga piirile $n \rightarrow \infty$ nii, et maksimaalne osalõigu pikkus läheb nulli, saame järgmise tulemuse.

Lause 15.4

Kui keha liigub mööda x -telge positiivses suunas punktist a punkti b pideva jõu $F(x)$ mõjul, siis jõu F poolt tehtud töö avaldub valemiga

$$\mathbf{W} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (15.23)$$

Näide 15.7 Vedru, mille pikkus vabas olekus on 12 cm, venitab 8 N jõu mõjul vertikaalselt 2 cm. Leida töö, mida on vaja teha, et venitada vedru vertikaalselt 6 cm.

Selles ülesandes peame lisaks teadma, et vedrule mõjuv jõud arvutatakse Hooke'i seaduse $F(x) = k \cdot x$ alusel, siin k on mingi konstant. Arvestades ülesandes antut, leiame kordaja k ,

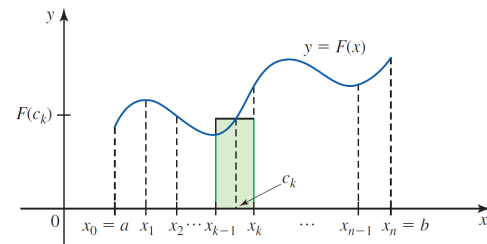
$$8 = k \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4 \text{ N/cm}.$$

Siit tehtav töö võrdub

$$A = \int_0^6 k \cdot x \, dx = 4 \int_0^6 x \, dx = 2x^2 \Big|_0^6 = 72.$$

Saime, et tehtav töö on $A = 72 \text{ N} \cdot \text{cm}$.

◇ ◇ ◇



Allikas: [6]

Näide 15.8 Laeva ankur kaalub 363 kg ja on kinnitatud keti külge, mis kaalub 15 kg meetri kohta. Leida ankru ülestõstmiseks vintsi poolt tehtav töö, kui ankur asub laeva dekist 6 meetrit (u. 20 jalga) all pool.

Tehtav töö koosneb kahest osast $W = W_A + W_K$, kus W_A on ankru üles tõstmiseks tehtav töö ja W_K on keti üles tõstmiseks tehtav töö. Esimene nendest avaldub lihtsalt

$$W_A = 363 \cdot 6 = 2178 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

Ketiga on asi keerulisem. Jagame keti võrdseteks osadeks, kus ühe osa pikkus on Δy . Sel juhul kaalub see tükk $15 \Delta y \text{ kg}$ meetri kohta. Seda elementi tõstetakse $(6 - y)$ meetrit, seega tõstmiseks tehtav töö avaldub

$$\Delta W_K \approx 15 \cdot \Delta y \cdot (6 - y).$$

Summeerides vastavate tükikeste tõstmiseks tehtava töö, saame

$$W_K = \int_0^6 15 \cdot (6 - y) dy = 15 \left(6y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=6} = 15(36 - 18) = 270 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

Kokku

$$W = 2178 + 270 = 2448 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

◇ ◇ ◇

15.6 Pöördkeha ruumala

Definitsioon 15.1

Olgu f pidev mittenegatiivne funktsioon lõigul $[a, b]$ ja olgu S joone $y = f(x)$ alla jääv pindala. Siis ümber x -telje pöörleva joonega moodustatud keha ruumala avaldub valemiga

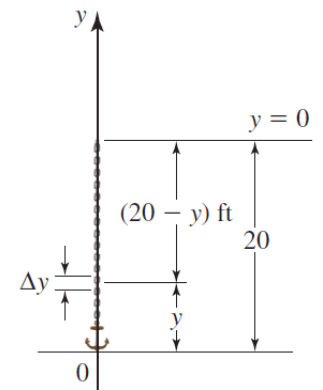
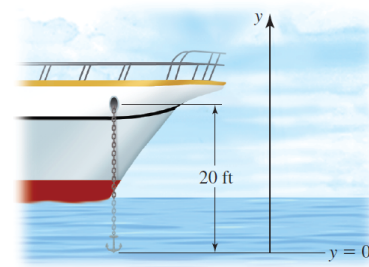
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (15.24)$$

Näitame viimast. Idee tuleb sellest, et raadiusega r oleva ringi pindala on πr^2 .

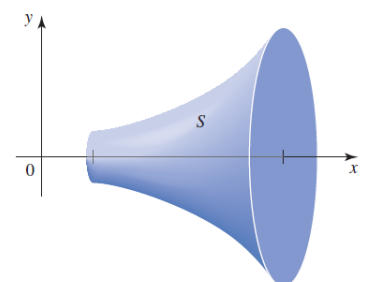
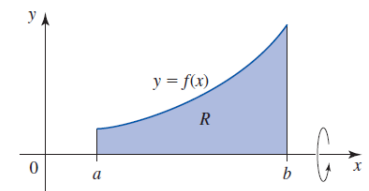
Punktis x on raadiuse arvuline väärtus $f(x)$ ja ringi pindala $\pi [f(x)]^2$. Me saame lõigul $[a, b]$ moodutada jaotuse

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

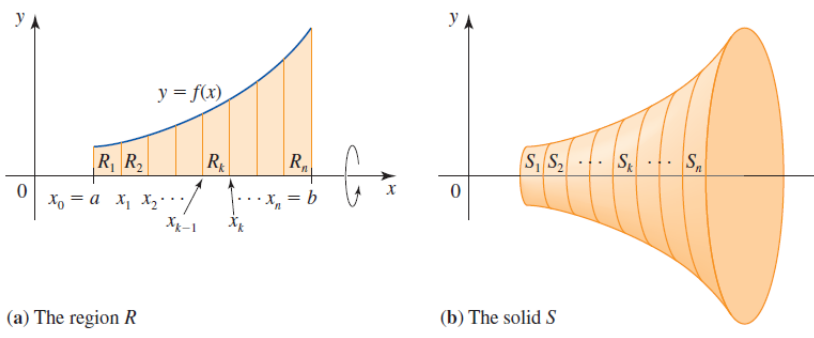
Igas osalõigul tekib siis kõvertrapets R_i ja selle kõvertrapetsi pöörlemisel ümber x -telje tekivad kettad S_i .



Allikas: [6]

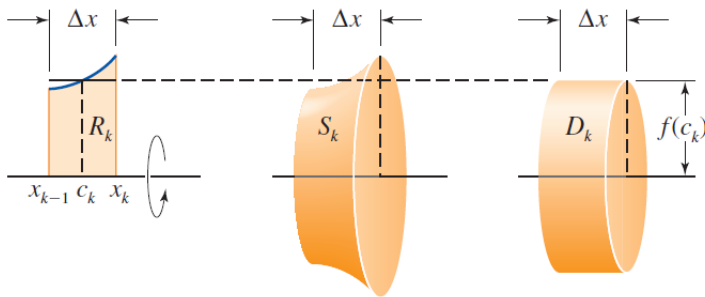


Allikas: [6]



Allikas: [6]

Nüüd saab tekitada kettad raadiusega $r_i = f(c_i)$, kus $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.



Allikas: [6]

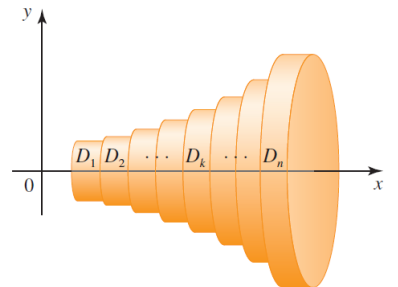
Kettakese ruumala avaldub ligikaudu

$$\Delta V_i \approx \pi r_i^2 \Delta x_i = \pi f^2(c_i) \Delta x_i.$$

Edasi saab tekitada Riemann'i summa

$$V \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \pi \sum_{i=1}^n f^2(c_i) \Delta x_i.$$

Jääb üle minna piirile $n \rightarrow \infty$. Saab näidata, et piirväärtus Riemann'i summast koondub Riemann'i integraaliks $\pi \int_a^b f^2(x) dx$.



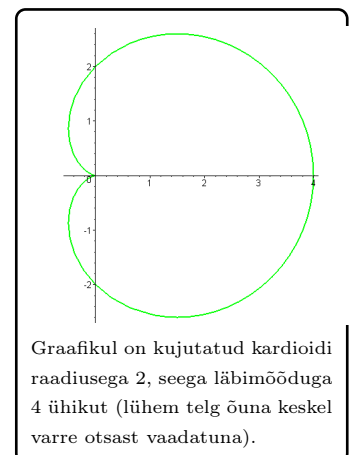
Allikas: [6]

Näide 15.9 Ideaalse Euroõuna ruumala. Näide on suhteliselt pikk ja tehniline. Kui me lõikame õuna varre juurest pooleks, siis saadud lõikepind meenutab tuntud joont, mida nimetatakse **kardioidiks**.

Olgugi, et kardioid ei kirjelda õuna läbilõiget üks-ühele, siis ometigi võime teda päris edukalt kasutada, kui tahame arvutada õuna ligikaudset ruumala, pindala või näiteks ümbermõõtu. Matemaatikas on kardioid kirja pandav polaarkoordinaatides valemiga

$$\mathbf{r} = a(\mathbf{1} + \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (15.25)$$

kus a on siis kardioidi raadius ehk pool lühema telje läbimõõtu, φ on kasutatav nurk ja r on antud nurgale vastav punkti kaugus koordinaatide alguspunktist.



Graafikul on kujutatud kardioidi raadiusega 2, seega läbimõõduga 4 ühikut (lühem telg õuna keskel varre otsast vaadatuna).

Et seda pilti näha klassikalisel xy -tasandil nagu joonisel, siis tuleb meil minna üle x ja y jaoks defineeritud polaarkoordinaatidele, mis on kirja pandav järgmiselt:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (15.26)$$

Polaarkoordinaadid tähendavad siin, et igale nurgale φ saame leida punkti (x, y) kauguse r nullpunktist.

Ühendades valemid (15.25) ja (15.26) saamegi kardioidi jaoks xy -tasandil järgmised seosed:

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi \\ y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (15.27)$$

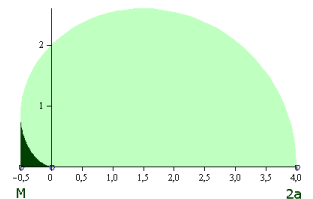
Õuna ruumala leidmiseks kasutame suhteliselt lihtsat meetodit, panes kardioidi joone ümber x -telje pöörlema. Paneme tähele, et sel juhul tekib meil iga x väärtuse jaoks ümber x -telje ringjoon raadiusega y . Ringjoone pindala oli aga teatavasti πR^2 . Seega tekib meil ümber x -telje pöörleva kujundi ristlõike pindala

$$S(x) = \pi y^2. \quad (15.28)$$

Keha ruumala kahe tasandi $x = \alpha$ ja $x = \beta$ vahel võib leida kui määratud integraali ristlõike pindalast

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (15.29)$$

Läheme nüüd täpsemalt meie kardioidi juurde. Esiteks peame arvesse võtma õuna südame juures asuvat tühimikku, kuna kujundi pöörlemisel ümber x -telje tekib ringjooneline kujund, mis on keskelt täidetud. Seega peaksime kogu pöördpinna ruumalast maha lahutama tekkiva tühimiku ruumala.



Arvestades valemid (15.28)-(15.29) saame

$$V = \pi \int_M^{2a} y^2 dx - \pi \int_M^0 y^2 dx, \quad (15.30)$$

kus esimene integraal kirjeldab seest täidetud kardioidi ruumala ilma tühimikuta (kasutades kumera joone y väärtusi) ja teine integraal kirjeldab varre juures oleva tühimiku ruumala (kasutades nõgusa joone y väärtusi vasakust otspunktist M kuni punktini 0). Märgime, et punktile M vastab kardioidi joonel punkt $(-\frac{1}{4}a, \frac{\sqrt{3}}{4}a)$.

Vahetades võrrandis (15.30) teises integraalis rajad (integraali märk muutub siis vastupidiseks), saame integraalid kokku liita ning tegelikult on kogu pöörleva kardioidi ruumala arvutatav valemiga

$$V = \pi \int_0^{2a} y^2 dx. \quad (15.31)$$

Järgnevalt läheb meil vaja integreerimisvõtteid nagu näiteks muutuja vahetus ja diferentsiaali märgi alla viimine. Suuruse y^2 leiame lihtsalt valemist (15.27). Lisaks läheb meil vaja diferentsiaali dx , mille leiame samuti valemist (15.27):

$$dx = x'(\varphi)d\varphi = (-a \sin \varphi - 2a \sin \varphi \cos \varphi)d\varphi = -a \sin \varphi(1 + 2 \cos \varphi)d\varphi. \quad (15.32)$$

Viimaseks sammuks üleminekul ainult muutujast φ sõltuvale funktsioonile peame integraalis (15.31) muutma integraali rajad $0 \dots 2a$. Paneme tähele, et kui $\varphi = 0$, siis valemist (15.27) saame et $x = a(1 + \cos 0) \cos 0 = a(1 + 1) \cdot 1 = 2a$. Analoogiliselt, kui $\varphi = \pi$, siis $x = a(1 + \cos \pi) \cos \pi = a(1 - 1) \cdot (-1) = 0$. Arvestades seda ja valemid (15.31)-(15.32) saame

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2a} y^2 dx = \pi \int_{\pi}^0 [a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi]^2 [-a \sin \varphi(1 + 2 \cos \varphi)] d\varphi \\ &= -\pi a^3 \int_{\pi}^0 (1 + \cos \varphi)^2 \sin^3 \varphi(1 + 2 \cos \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (15.33)$$

Kuna $-\sin \varphi d\varphi = d(\cos \varphi)$ ja $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$, siis saame

$$V = \pi a^3 \int_{\pi}^0 (1 + \cos \varphi)^2 (1 - \cos^2 \varphi)(1 + 2 \cos \varphi) d(\cos \varphi). \quad (15.34)$$

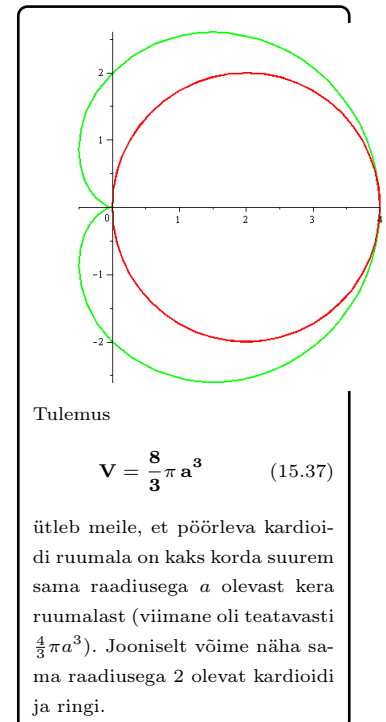
Teeme muutujavahetuse $\cos \varphi = u$. Sel juhul muutuvad integraali rajad $\pi \dots 0$ asemel $-1 \dots 1$. Valem (15.34) teisendub kujule

$$V = \pi a^3 \int_{-1}^1 (1 + u)^2 (1 - u^2)(1 + 2u) du. \quad (15.35)$$

Jääb veel üle viia arvutus lõpule. Järgnevas arvestame, et integraal paaritustest funktsioonidest u , u^3 ja u^5 on sümmeetriliste rajade korral võrdsed nulliga ja paarifunktsioonide 1 , u^2 ja u^4 korral võime võtta kahekordse pooliku integraali:

$$\begin{aligned} V &= \pi a^3 \int_{-1}^1 (1 + 4u + 4u^2 - 2u^3 - 5u^4 - 2u^5) du \\ &= 2\pi a^3 \int_0^1 (1 + 4u^2 - 5u^4) du = 2\pi a^3 \left(u + \frac{4}{3}u^3 - u^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3}\pi a^3. \end{aligned} \quad (15.36)$$

◇ ◇ ◇



15.7 Keha ruumala

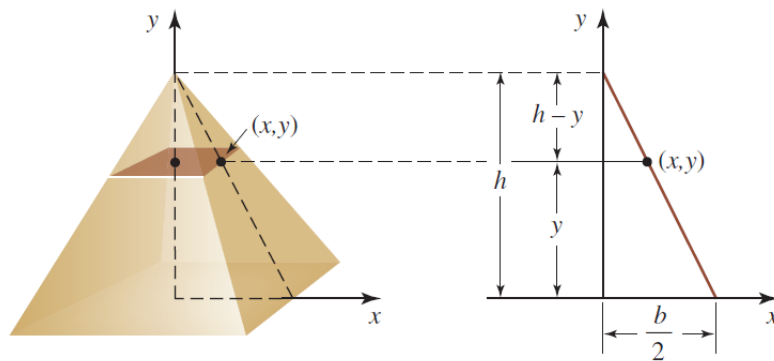
Vaatleme keha, mille korral on teada tema ristlõikepindala $S(x)$. Siis saab analoogiliselt eelmise peatükiga tuletada järgmise tulemuse.

Lause 15.5

Olgu keha piiratud tasanditega, mis on risti x -teljega punktides $x = a$ ja $x = b$. Kui keha ristlõikepindala igas punktis $x \in [a, b]$ on $S(x)$ ja S on pidev funktsioon lõigus $[a, b]$, siis keha ruumala avaldub valemiga

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (15.38)$$

Näide 15.10 Leiame ruudukujulise alusega püramiidi ruumala, kui aluse külg on b ja püramiidi kõrgus on h .



Allikas: [6]

Asetame koordinaatide alguspunkti püramiidi keskele alusele. Siis punktis x tekib kõrgus y ja y -teljega risti oleva pinna (ruudu) pindala on $S(x) = 2x \cdot 2x = 4x^2$.

Kuna me peame need pindalad summeerima mööda y -telge, siis tuleb ka ristlõike pindala avaldada y kaudu. Sarnastest kolmnurkadest saame

$$\frac{x}{\frac{b}{2}} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{2h}(h-y).$$

Seega

$$S(y) = 4x^2 = \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2.$$

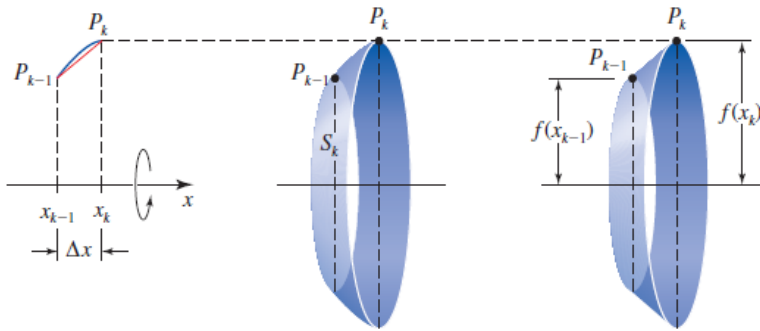
Kogu ruumala leiame valemist

$$V = \int_0^h S(y) dy = \frac{b^2}{h^2} \int_0^h (h-y)^2 dy = -\frac{b^2}{h^2} \left(\frac{(h-y)^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=h} = \frac{hb^2}{3}.$$

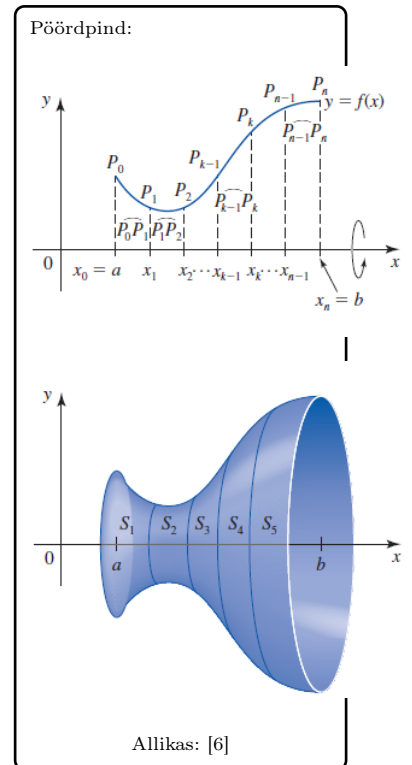
◇ ◇ ◇

15.8 Pöördkeha pinna pindala *

Lähtudes ringjoone pikkuse valemist $2\pi r$ saab analoogiliselt teiste teemadega tuletada järgmise tulemuse.



Allikas: [6]



Allikas: [6]

Lause 15.6

Olgu funktsioon f lõigus $[a, b]$ mittenegatiivne diferentseeruv funktsioon. Siis funktsiooni f poolt ümber x -telje tekitatud pöördkeha pinna pindala avaldub valemiga

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (15.39)$$

15.9 Masskeskme leidmine *

Kui meil on kiigele pandud kaks raskust, üks massiga m_1 ja teine massiga m_2 , siis on teoreetiliselt võimalik leida punkt

$$\bar{x} = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2},$$

kuhu kiige asetades jääb süsteem tasakaalu. Kui raskusi on rohkem, siis

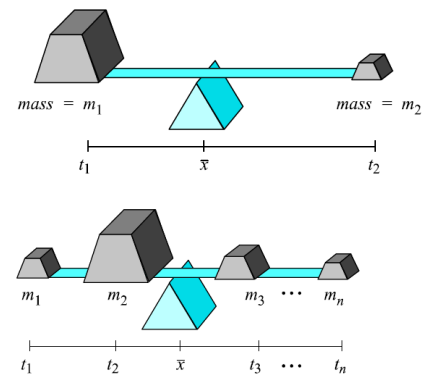
$$\bar{x} = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_n t_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Kui punktid massidega m_1, \dots, m_n asuvad tasandil koordinaatidega $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, siis süsteemi massikeske asub punktis (\bar{x}, \bar{y}) , kus

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (15.40)$$

ja

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (15.41)$$



Allikas: [4]

Definitsioon 15.2

Me ütleme, et tasandilisel pinnal R on massikeske punktis (\bar{x}, \bar{y}) , kui selle pinna toetamisel nn. nõelale punktis (\bar{x}, \bar{y}) jääb pind tasakaalu.

Lause 15.7

Olgu R pind, mis jääb kahe funktsiooni f ja g graafiku vahele, kus $f(x) \geq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral. Sel juhul pinna R massese asub punktis (\bar{x}, \bar{y}) , kus

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \int_a^b \frac{1}{2} [f^2(x) - g^2(x)] dx, \quad (15.42)$$

kus S on pinna pindala

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (15.43)$$

Tõestus. Näitame seda skemaatiliselt. Vaatleme pinda R , mille väikese tüükese pindala lõigus Δx_i on

$$\Delta S_i \approx [f(x) - g(x)] \cdot \Delta x_i.$$

Eelduse järgi on meil ühtlane pind tihedusega ρ . Sel juhul pinnatüki mass punktis $x \in [x_{i-1}, x_i]$ on

$$\rho \cdot \Delta S_i = \rho \cdot [f(x) - g(x)] \cdot \Delta x_i.$$

Kogu pinna R pindala on S ja mass on sel juhul

$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \rho \cdot S.$$

Väikese pinnatüki moment punktis $x \in [x_{i-1}, x_i]$ on (jõuõlg korda mass)

$$\frac{1}{2} [f(x) + g(x)] \cdot \rho \cdot [f(x) - g(x)] \cdot \Delta x_i.$$

Seega kogu moment avaldub

$$M_x = \rho \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2} \right] \cdot [f(x) - g(x)] dx = \frac{\rho}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

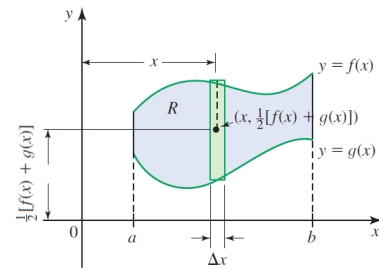
Pinnatüki moment y -teljel punktis on $x \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$x \cdot \rho \cdot [f(x) - g(x)] \cdot \Delta x_i.$$

Siit

$$M_y = \rho \int_a^b x \cdot [f(x) - g(x)] dx.$$

Massese asub punktis $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right)$. □



Allikas: [6]

Näide 15.11 Leiame lõigul joonte $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ ja $g(x) = x^2 - 3$ vahele jääva pinna masskeskme.

Funktsioonide lõikepunktid asuvad punktides $x = -1$ ja $x = 2$. Leiame pindala

$$S = \int_{-1}^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^2 [-2x^2 + 2x + 4] dx = 9.$$

Edasi leiame masskeskme x -koordinaadi

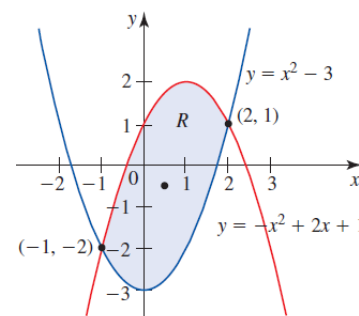
$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_{-1}^2 x [f(x) - g(x)] dx = \frac{1}{9} \int_{-1}^2 [-2x^3 + 2x^2 + 4x] dx = \frac{1}{2}$$

ja y -koordinaadi

$$\bar{y} = \frac{1}{S} \int_{-1}^2 \frac{1}{2} [f^2(x) - g^2(x)] dx = \frac{1}{9} \int_{-1}^2 [-2x^3 + 4x^2 + 2x - 4] dx = -\frac{1}{2}.$$

Seega pinna masskeske asub punktis $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

◇ ◇ ◇



Allikas: [6]

Viited

- [1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).
- [2] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.
- [3] D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, P. F. Lock, D. E. Flath. Applied Calculus. Wiley, 2010.
- [4] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.
- [5] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.
- [6] S. T. Tan. Single Variable Calculus. Brooks/Cole 2010.
- [7] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.
- [8] K. Tsishchanka. Section 9.4. Areas and Lengths in Polar Coordinates (veebikonspekt). New York University 2010.
- [9] A. J. Washington. Basic Technical Mathematics with Calculus. 10th ed. Pearson, 2014.