Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

16 Määratud integraal ülemise raja funktsioonina. Päratud integraalid ja nende rakendused

Sisukord

Kontrolltöö teemad

1. Päratute integraalide leidmine, nende koondumine ja hajumine.

Eksamiteemad

1. Mida tähendab määratud integraal ülemise raja funktsioonina?
2. Matemaatilise analüüsi esimene fundamentaalteoreem.
3. Lõpmatute rajadega integraali definitsioon.
4. Integraali definitsioon katkevast funktsioonist.
5. Millal nimetatakse päratut integraali koonduvaks ja millal hajuvaks?

16.1 Määratud integraal ülemise raja funktsioonina

Olgu funktsioon f pidev lõigus $[a, b]$, siis eksisteerib tal algfunktsioon selles lõigus ja vastavus

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

määrab lõigus $[a, b]$ funktsiooni G, kus

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Teoreem 16.1

Matemaatilise analüüsi esimene fundamentaalteoreem. Kui funktsioon $y = f(x)$ on pidev lõigus $[a, b]$, siis eksisteerib tuletis $G'(x)$ selles lõigus ja

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{16.1}$$

Esimene fundamentaalteoreem ütleb meile sisuliselt, et funktsiooni tuletise leidmine ja pindala leidmine on teineteise pöördoperatsioonid.

Kuigi pindala leidmise idee lõpmata väikeste ristkülikute summeerimise teel kandub Vana-Kreeka aegadesse, siis päris pikka aega ei olnud selge, et need kaks operatsiooni: kiiruse leidmine ja pindala leidmine tõepoolest nii tihedalt seotud on.

Paneme tähele, et teoreem ei ütle meile, kuidas midagi algoritmiliselt täpselt leida. Teoreemi sisu on pigem teoreetiline: diferentseerimine ja integreerimine on otseselt teineteisega seotud, seda siis vähemalt pidevate funktsioonide jaoks.

Teoreemi tõestusega ja täiendustega on tegelenud näiteks James Gregory, Isaac Barrow, Isaac Newton, Gottfried Leibniz.

Tõestus. Olgu meil lõigul $[a, b]$ antud pidev funktsioon $y = f(x)$. Sel juhul võib iga argumendi $x \in [a, b]$ jaoks funktsiooni

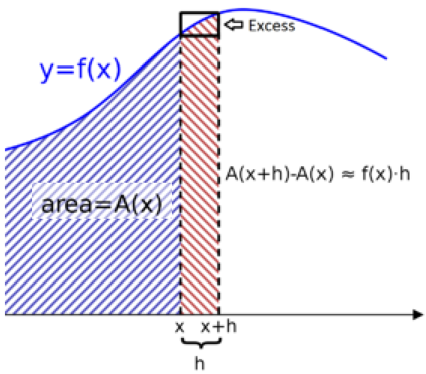
$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

väärtust tõlgendada, kui joone $y = f(x)$ ja x-telje vahele jäävat pindala lõigus $[a, x]$. Sel juhul väikese osalõigu $[x, x + h]$, $h > 0$, peal on pindala

$$A(x + h) - A(x).$$

Viimast pindala võib ligikaudu arvutada ka kui ristküliku (joonisel paremal olev kitsas ristkülik) pindala $h \cdot f(x)$ ehk

$$A(x + h) - A(x) \approx h \cdot f(x).$$



Allikas: Wikipedia

Tähistame ligikaudse valemi kasutamisel tehtud vea $R(x)$. Siis

$$A(x + h) - A(x) = h \cdot f(x) + R(x).$$

Avaldame siit funktsiooni f väärtuse

$$f(x) = \frac{A(x + h) - A(x)}{h} - \frac{R(x)}{h}.$$

Saab näidata, et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{R(x)}{h} = 0$, kuna $\frac{R(x)}{h}$ kujutab endast väiksemat suurust, kui joonisel funktsiooni f ümber oleva väikese ristküliku kõrgus (ja viimane läheb nulli, kui ristküliku alus h läheb nulli). Seega

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = A'(x).$$

□

Märkus 16.1

Teoreemist 16.1 ja algfunktsiooni definitsioonist järeldub, et funktsioon G on funktsiooni f üks algfunktsioone, mistõttu pideva funktsiooni f suvaline algfunktsioon F avaldub kujul

$$F(x) = G(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt + C \tag{16.2}$$

ning määramata integraali saab kirja panna järgmiselt:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C. \tag{16.3}$$

Näide 16.1 Märgime, et kui keha liigub kiirusega $v = v(t)$, siis pideva (positiivse kiirusega) liikumise korral avaldub teepikkus kui

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(x)\,dx,$$

analoogiliselt avaldub kiirus $v = v(t)$ kiirenduse $a = a(t)$ kaudu,

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(x)\,dx.$$

◇ ◇ ◇

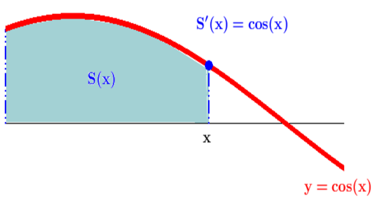
Näide 16.2 Leiame $S'(x)$, kui

$$S(x) = \int_{-1}^x \cos(t)\,dt.$$

Teoreemi 16.1 järgi

$$S'(x) = \cos(x).$$

Mida ütleb lisaks meile viimane tulemus? Kui me vaatame joone $\cos(x)$ ja x-telje vahele jääva ala pindala $S(x)$, siis selle pindala muutumise kiirus igas punktis x on $S'(x) = \cos(x)$. Teisiti, pindala muutub kiirusega, mis võrdub kõvertrapetsi kõrgusega $\cos(x)$.



◇ ◇ ◇

Näide 16.3 Leiame $F'(x)$, kui

$$F(x) = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{1-t^2}\,dt.$$

Teoreemi 16.1 järgi ja liitfunktsiooni reegli abil saame, et

$$F'(x) = \frac{1}{1-\sin^2(x)} \cdot \frac{d\sin(x)}{dx} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}.$$

◇ ◇ ◇

16.2 Päratud integraalid

Määratud integraali $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ defineerimisel eeldasime, et $-\infty < a \le b < \infty$. Lisaks on määratud (Riemann'i) integraali olemasoluks tarvilik tingimus funktsiooni f tõkestatus lõigus $[a,b]$ (kui funktsioon ei ole tõkestatud mingis punktis, siis saab Riemann'i summas moodustada ristküliku, mille kõrgus on tõkestamata ja seega ka kogu summa on tõkestamata).

Osutub, et toodud eeldustest saab vabaneda, kui sobivalt üldistada määratud integraali mõistet. Vaatleme kahte erinevat liiki päratut integraali: lõpmatute rajadega integraalid ja lisaks integraalid tõkestamata funktsioonidest.

16.3 Lõpmatute rajadega integraal

Eksisteerigu $\int\limits_a^M f(x)\,dx$, iga $M \in [a,\infty)$ korral, siis defineerime päratu integraali piirkonnas $[a,\infty)$ seosega

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int\limits_a^M f(x)\,dx. \tag{16.4}$$

Eksisteerigu $\int\limits_M^b f(x)\,dx$, iga $M \in (-\infty,b]$ korral, siis defineerime päratu integraali piirkonnas $(-\infty,b]$ seosega

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int\limits_M^b f(x)\,dx. \tag{16.5}$$

Definitsioon 16.1

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus seoses (16.4) (seoses (16.5)), siis nimetame vastavat päratut integraali koonduvaks, vastasel korral hajuvaks.

Näide 16.4 Leiame päratu integraali

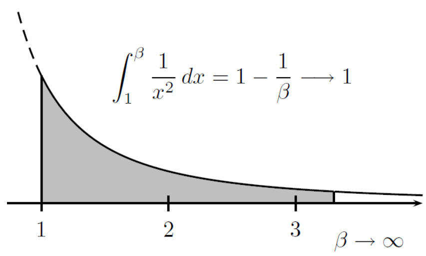
$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Märgime, et funktsioon $y = \frac{1}{x^2}$ on pidev igas piirkonnas $[1,M]$, kus $M \in (1,\infty)$, sel juhul saab kasutada Newton'i-Leibniz'i valemit. Kirjutame

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int\limits_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=M} \right) = \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{M} + 1 \right) = 1.$$

Joone $y = \frac{1}{x^2}$ alune pindala piirkonnas $[1,\infty)$ on tõkestatud ja $S = 1$.

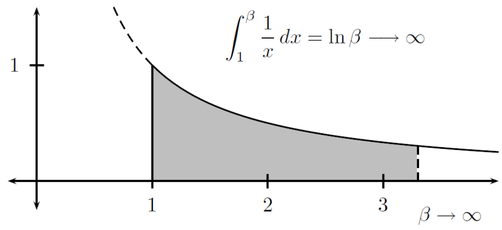
◇ ◇ ◇



Allikas: [1]

Näide 16.5 Leiame päratu integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx.$$



Allikas: [1]

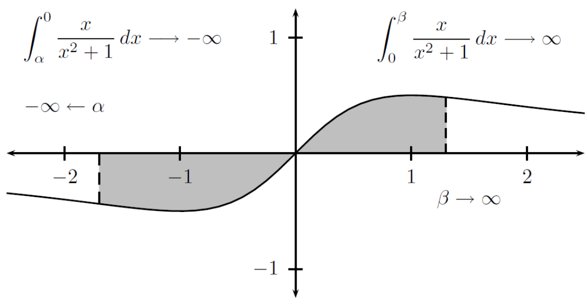
Märgime, et funktsioon $y = \frac{1}{x}$ on pidev igas piirkonnas $[1, M]$, kus $M \in (1, \infty)$, sel juhul saab kasutada Newton'i-Leibniz'i valemit. Kirjutame

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to\infty} \left(\ln|x| \Big|_{x=1}^{x=M} \right)$$
$$= \lim_{M\to\infty} (\ln|M| - \ln|1|) = \infty.$$

Joone $y = \frac{1}{x}$ alune pindala on piirkonnas $[1, \infty)$ tõkestamata ja $S \to \infty$.
$\diamond \diamond \diamond$

Näide 16.6 Kui mõlemad rajad on tõkestamata, siis tuleb oma järeldustes olla ettevaatlik. Leiame päratu integraali

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx.$$



Allikas: [1]

Märgime, et funktsioon $y = \frac{1}{x^2}$ on pidev igas piirkonnas $[-M, M]$, kus $M \in (-\infty, \infty)$, sel juhul saab kasutada Newton'i-Leibniz'i valemit. Kirjutame

$$\int_{-M}^M \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-M}^M \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| \Big|_{x=-M}^{x=M} = 0.$$

Ometigi ei järeldu sellest, et esialgne integraal ise on võrdne nulliga. Osutub, et selline integraal on hajuv (selles mõttes, et tal ei ole ühest väärtust).

Kui vaadata eraldi integraale $\int\limits_0^\infty$ ja $\int\limits_{-\infty}^0$, siis

$$\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_{x=0}^{x=M}\right) = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|M^2+1\right|\right) = \infty$$

ja

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^0 \tfrac{x}{x^2+1}\,dx &= \lim_{M\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_{x=M}^{x=0}\right)\\ &= \lim_{M\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\ln\left|M^2+1\right|\right) = -\infty.\end{aligned}$$

Saime, et

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \infty - \infty,$$

mis on määramata suurus ja seepärast ütleme, et antud integraal hajub. Tegelikult piisas leida ainult üks integraal $\int\limits_0^\infty \to \infty$, et järeldada kogu esialgse integraali hajumist.

Siin võiks ju väita, et saaksime integraali $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ leida kui piirväärtuse $\lim\limits_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M}$, kuid päris nii lihtne see ei ole. Nimelt, vaatleme kahte erinevat lõpmatuse protsessi:

$$\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_{x=-M}^{x=M}\right) = 0,$$

kuid samas

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{2M} \frac{x}{x^2+1}\,dx &= \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_{x=-M}^{x=2M}\right)\\ &= \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(2M)^2+1}{M^2+1}\right|\right)\\ &= \lim_{M\to\infty}\left(\ln\sqrt{\frac{4+\frac{1}{M^2}}{1+\frac{1}{M^2}}}\right) = \ln(2).\end{aligned}$$

Paneme tähele, et protsessis $M\to\infty$ mõlemal juhul $(-M,M)$ ja $(-M,2M)$ kaetakse ära kogu reaaltelg $(-\infty,\infty)$, kuid piirväärtused integraalidest annavad erinevad tulemused. Sellepärast me kasutame järgmist märkust.

◇ ◇ ◇

Märkus 16.2

Kui mõlemad rajad on lõpmatud ja üks integraalidest $\int\limits_{-\infty}^0$ või $\int\limits_0^\infty$ on tõkestamata, siis integraal $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ hajub.

16.4 Integraal tõkestamata funktsioonist

Olgu funktsioon f tõkestamata punkti b ümbruses ja eksisteerigu

$$\int_a^M f(x)\,dx,$$

iga $M \in [a,b)$ korral, siis defineerime päratu integraali lõigus $[a,b]$ seosega

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{M\to b-} \int_a^M f(x)\,dx. \tag{16.6}$$

Olgu funktsioon f tõkestamata punkti a ümbruses ja eksisteerigu

$$\int_M^b f(x)\,dx,$$

iga $M \in (a,b]$ korral, siis defineerime päratu integraali lõigus $[a,b]$ seosega

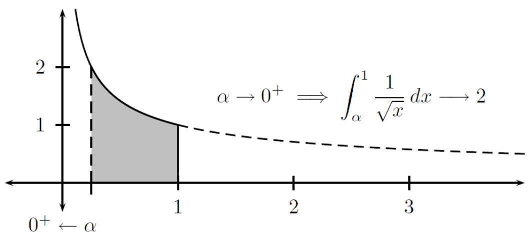
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{M\to a+} \int_M^b f(x)\,dx. \tag{16.7}$$

Definitsioon 16.2

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus seoses (16.6) (seoses (16.7)), siis nimetame vastavat päratut integraali koonduvaks, vastasel korral hajuvaks.

Näide 16.7 Leiame päratu integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$



Allikas: [1]

Märgime, et funktsioon $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ on pidev igas piirkonnas $[M,1]$, kus $M \in (0,1)$, sel juhul saab kasutada Newton'i-Leibniz'i valemit. Kirjutame

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{M\to 0+} \int_M^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{M\to 0+} \left(2\sqrt{x}\Big|_{x=M}^{x=1}\right)$$
$$= \lim_{M\to 0+} \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{M}\right) = 2.$$

Joone $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ alune pindala on piirkonnas $[0,1]$ tõkestatud ja $S = 2$.

◇ ◇ ◇

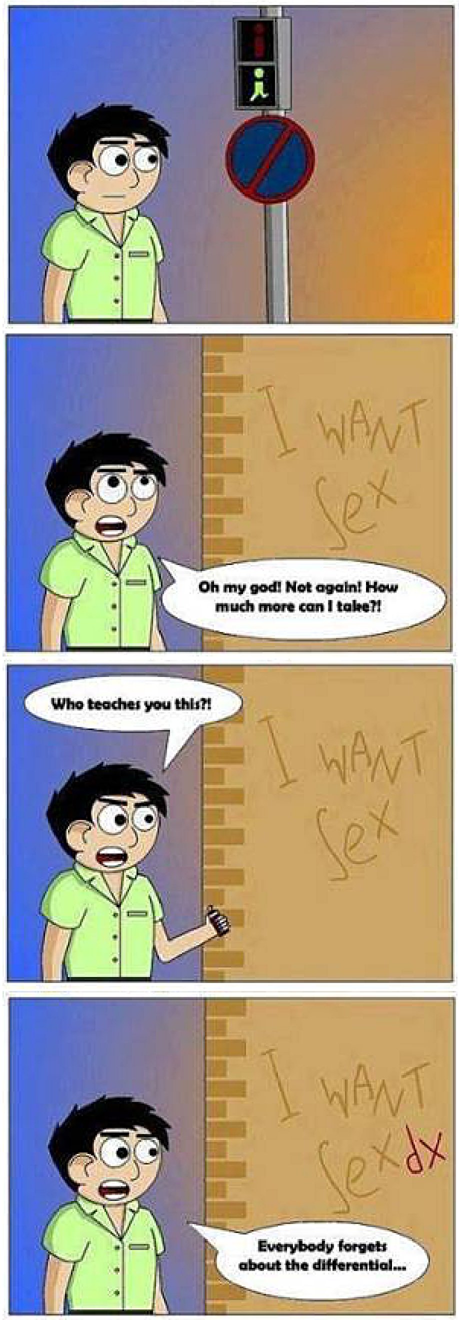
Näide 16.8 Integraal

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ei eksisteeri Riemann'i mõttes, sest integreeritav funktsioon pole tõkestatud punkti $x = 1$ ümbruses. Selle funktsiooni päratu integraal on aga

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{M\to 1-} \int_0^M \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{M\to 1-} \left(\arcsin(x) \Big|_{x=0}^{x=M} \right)$$
$$= \lim_{M\to 1-} \arcsin(M) = \frac{\pi}{2}.$$

◇ ◇ ◇

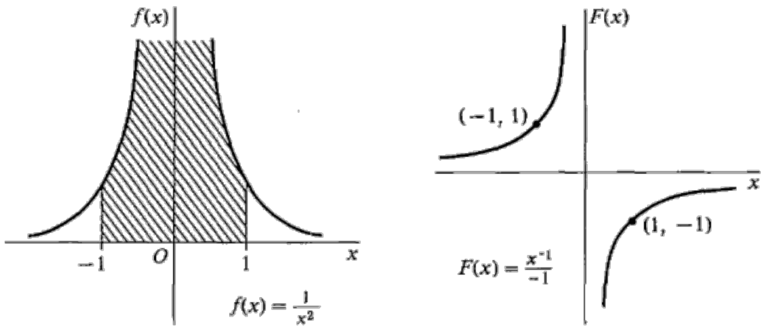


Allikas: internet

Näide 16.9 Integraal

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

ei eksisteeri Riemann'i mõttes, kuna funktsioon $y = \frac{1}{x^2}$ on katkev punktis 0 olles samal ajal tõkestamata punkti 0 ümbruses.



Allikas: http://www.vias.org/calculus/04_integration_03_ex09.html

Võib leida, et pool pindalast on

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to 0-} \int_M^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to 0-} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{x=M}^{x=1} \right) = \lim_{M\to 0-} \left(\frac{1}{M} - 1 \right) = \infty.$$

Kuna pool pindala on tõkestamata, siis ka terve pindala.

Märgime, et vale oleks kohe Newton'i-Leibniz'i valemit kasutada:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \longmapsto -\frac{1}{x} \Big|_{x=-1}^{x=1} = -1 - 1 = -2.$$

Viimane on ilmselgelt vale, sest juba jooniselt näeme, et pindala peab tulema positiivne. Vale tulemuse saame, kuna funktsioon $y = \frac{1}{x^2}$ ei ole pidev lõigus $[-1, 1]$, kuid Newton'i-Leibniz'i valemit võis kasutada ainult pideva funktsiooni jaoks.

◇ ◇ ◇

16.5 Integraalide rakendusi statistikas *

Tõenäosusteooria baseerub juhusliku suuruse mõistel, mida me siin rangelt andma ei hakka. Üldjoontes, suurust nimetatakse juhuslikuks, kui see suurus sõltub juhuslikest sündmustest ja mille väärtust pole seetõttu võimalik enne sündmuse toimumist kindlalt ette ennustada.

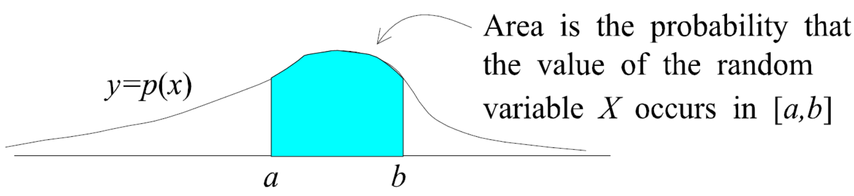
Definitsioon 16.3

Kui x on pidev juhuslik suurus, siis tõenäosus, et x asub arvude a ja b vahel, defineeritakse integraaliga

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x)\, dx, \tag{16.8}$$

kus funktsioon p on pideva juhusliku suuruse x tihedusfunktsioon või ka lihtsalt tihedus.

Seejuures tiheduse algfunktsiooni F, kus $F'(x) = p(x)$, nimetame pideva juhusliku suuruse x jaotusfunktsiooniks.



Allikas: [3]

Kuna tõenäosus on alati mittenegatiivne, siis peab kehtima omadus $p(x) \geq 0$ iga $x \in (-\infty, \infty)$ jaoks ja lisaks tõenäosus, et $x \in (-\infty, \infty)$ on 100% ehk

$$P(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1. \tag{16.9}$$

Statistikas uuritakse teatud jaotusfunktsioonide (ja tihedusfunktsioonide) klasse. Enim tuntud jaotused on ühtlane jaotus, normaaljaotus, eksponentjaotus. Nende jaotuste tihedusfunktsioonid on teada ja selle järgi on lihtne arvutada tõenäosusi.

Definitsioon 16.4

Pideva juhusliku suuruse keskväärtuseks nimetatakse suurust

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\, dx. \tag{16.10}$$

Paneme tähele, et kui meil on homogeensest materjalist plaat massiga 1, mis on piiratud tiheduse $p(x)$ ning x-telje vahele jääva alaga, siis sellise plaadi masskese x-telje sihis ongi jaotuse keskväärtus.

Definitsioon 16.5

Pideva juhusliku suuruse dispersiooniks nimetatakse suurust

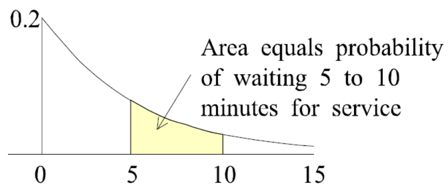
$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 \cdot p(x)\, dx. \tag{16.11}$$

Dispersioon näitab jaotuse hajumist keskväärtuse $E(x)$ suhtes. Standardhälbeks σ nimetatakse suurust $\sqrt{D(x)}$, mille korral tõenäosus $P(E(x) - \sigma \le x \le E(x) + \sigma) \approx \frac{2}{3}$.

Näide 16.10 Olgu juhuslikuks suuruseks ajaintervall T, mis jääb kahe erineva kliendi teenindamise vahele, nö. ooteaeg. Kui μ on nende ajaintervallide keskmine, siis T jaotub eksponentsiaalselt tihedusega

$$p(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , t < 0 \\ \frac{1}{\mu}\, e^{-t/\mu} & , t \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Olgu konkreetselt vaatluse all restoran, kus laud vabaneb keskmiselt iga 5 minuti järele. Kui laud vabaneb näiteks kell 6:00, milline on tõenäosus, et järgmine laud vabaneb kella 6:05 ja 6:10 vahel?



Allikas: [3]

Siin $\mu = 5$ minutit. Sellisel juhul tihedusfunktsiooniks on

$$p(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , t < 0 \\ \frac{1}{5}\, e^{-t/5} & , t \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Me otsime tõenäosust $P(5 \le T \le 10)$, mille leiame integraalist

$$P(5 \le T \le 10) = \int_5^{10} p(t)\, dt = -\int_5^{10} e^{-t/5}\, d\left(-\frac{t}{5}\right) = -e^{-t/5}\Big|_{t=5}^{t=10} \approx 0.233,$$

ehk 23.3 %. Päratud integraalid tekiks meil, kui me küsiks näiteks, et milline on tõenäosus, et ooteaeg T on suurem kui 20 minutit. Sellisel juhul otsime tõenäosust $P(20 \le T < \infty)$,

$$\begin{aligned} P(20 \le T < \infty) &= \int_{20}^{\infty} p(t)\, dt = -\int_{20}^{\infty} e^{-t/5}\, d\left(-\tfrac{t}{5}\right) = -\lim_{M\to\infty} e^{-t/5}\Big|_{t=20}^{t=M} \\ &= -\lim_{M\to\infty}\left(e^{-M/5} - e^{-4}\right) = e^{-4} \approx 0.018, \end{aligned}$$

ehk 1.8 %. Võib leida, et dispersioon

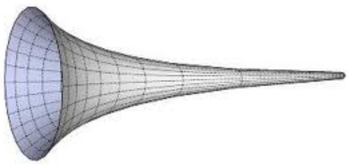
$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-5)^2 p(t)\, dt = \frac{1}{5}\int_0^{\infty} (t-5)^2 e^{-t/5}\, dt = 25,$$

ja standardhälve on $\sigma = \sqrt{D(x)} = \sqrt{25} = 5$. Viimane tähendab, et u. 66% juhtudel on ooteaeg vahemikus $[5-5, 5+5] = [0, 10]$ minutit.

◇ ◇ ◇

16.6 Gabriel'i trompet *

Vaatleme piirkonnas $[1, \infty)$ joont $y = \frac{1}{x}$. Kui me paneme selle joone ümber x-telje pöörlema, siis tekib ruumiline kujund, mida nimetatakse Gabriel'i trompetiks või siis ka Torricelli trompetiks.



Selle trompetiga on seotud huvitav paradoks. Nimelt, trompetil on lõplik ruumala, kuid lõpmatu välispinna pindala. Trompetit saaks teoreetiliselt seest poolt värvida, kallates sinna sisse lõpliku koguse värvi, aga välispinda ei ole võimalik lõpliku koguse värviga katta.

Leiame pöördpinna ruumala

$$V = \pi \int_1^\infty y^2\,dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = -\pi \lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=M} \right) = \pi.$$

Pinna pindala tuleb aga

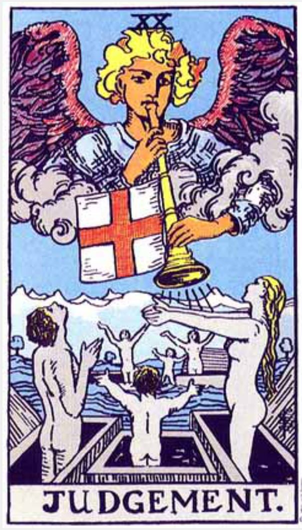
$$S = 2\pi \int_1^\infty y \cdot \sqrt{1 + [y']^2}\,dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx.$$

Viimast integraali on täpselt üsna raske leida, aga meile piisab hinnangust. Kuna $\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq 1$, siis

$$S \geq 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = 2\pi \cdot \lim_{M\to\infty} (\ln|M| - \ln|1|) = \infty.$$

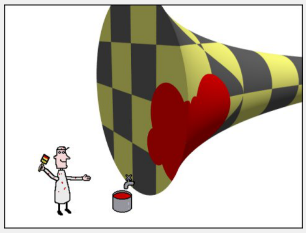
Seega pinna pindala S on tõkestamata.

Trompeti nimi tuleb peaingel Gabriel'i nimest, kes peaks siis Viimse Kohtupäeva kuulutamisel puhuma trompetit sümboliseerimaks lõpmatut ja lõplikku üheskoos.



Allikas: internet

Gabriel'i trompeti esmauurimise au kuulub itaalia füüsikule ja matemaatikule - baromeetri leiutajale - Evangelista Torricelli'le.



Allikas: http://www.h33.dk/

Viited

[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[3] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.

[4] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[5] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.

[6] A. J. Washington. Basic Technical Mathematics with Calculus. 10th ed. Pearson, 2014.