Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

# 18 Arvread

## Sisukord



**Eksamiteemad**

1. Mis on arvjada ja millal see koondub.
2. Mis on arvrida, selle osasumma. Millal nimetatakse arvrida koonduvaks.
3. Mis on geomeetriline rida ja millal ta koondub ning millal hajub.
4. Geomeetrilise rea summa $|q| < 1$ korral.
5. Mis on harmooniline rida, selle hajumine.
6. Mis on üldine harmooniline rida ja millal see koondub ning millal hajub.
7. Arvrea hajumise tunnus.
8. Positiivsete ridade võrdluslause.
9. Positiivse rea integraalne tunnus ja **selle tõestamine**.

## 18.1 Arvjadad

Arvjadad ja jadad üldisemalt on matemaatikas väga tähtsal kohal. Nende abil on tõestatud väga palju olulisi tulemusi ja kindlasti tõestatakse veel uusigi. Meie oma kursuses neid väga ei uuri. Küll aga läheb meil vaja arvjada mõistet, et jõuda järgmises punktis arvrea mõisteni.

**Definitsioon 18.1**

Arvjadaks nimetatakse naturaalarvulise argumendiga funktsiooni

$$x = x(n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Tähistame $(x_n)$. Arvu $x(n) = x_n$ nimetatakse jada $(x_n)$ üldliikmeks (ka elemendiks). Kirjutame ka

$$(x_n) = (x_n)_{n=1}^{\infty} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

**Näide 18.1** Funktsiooni $x = n^2$ korral saame jada

$$(x_n) = 1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots .$$

$\diamond \diamond \diamond$

**Definitsioon 18.2**

Jada $(x_n)$ nimetatakse koonduvaks, kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{18.1}$$

Jada, mis ei koondu ($\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ või piirväärtust $\lim_{n\to\infty} x_n$ ei leidu), nimetatakse hajuvaks.

Jada piirväärtuse leidmisel võib kasutada funktsiooni piirväärtuse omadusi.

**Näide 18.2** Leiame

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n}{n^2 + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{5}{n^2}} = 3.$$

$\diamond \diamond \diamond$

**Näide 18.3** Vaatleme jada

$$(x_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots .$$

Antud jada hajub, kuna ei leidu piirväärtust $\lim_{n\to\infty} x_n$. Viimane on sarnane siinuse $\sin(x)$ ja koosinuse $\cos(x)$ võnkumisega, ka sel korral protsessis $x \to \infty$ piirväärtus puudub.

$\diamond \diamond \diamond$

## 18.2 Arvread

Arvread on ühed üsna kummalised matemaatilised objektid. Ühest küljest on tegemist täielikult matemaatilise abstraktsiooniga, kuna arvridade teoorias tegeletakse väikeste arvude lõpmata arv kordi kokku liitmisega... lõpmatu arv kordi ... kas see ei kõla võimatult või isegi veidi jaburalt?

Teisalt, tihti on lõplike suuruste uurimiseks palju abi sellistest veidratest objektidest. Tegelikult me juba tunneme ühte sellist sarnast vahendit - määratud integraal - mis vähemalt lihtsamal juhul oma sisult ei tee midagi muud, kui seesama arvrida. Nimelt, liidab lõpmata arv kordi lõpmata väikeseid arve.

Olgu antud arvjada $(u_n) = u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$.

**Definitsioon 18.3**

Avaldist

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{18.2}$$

nimetatakse arvreaks (ka lihtsalt reaks). Arve $u_n$ nimetatakse rea (18.2) liikmeteks.

Järgnevas täpsustame, mida mõista arvrea summa all.

**Definitsioon 18.4**

Arvrea (18.2) osasummaks nimetatakse summat

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{18.3}$$

**Definitsioon 18.5**

Arvrida (18.2) nimetatakse koonduvaks, kui tema osasummade jada koondub, s.t. kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = S.$$

Arvu $S$ nimetatakse rea (18.2) summaks. Arvrida, mis ei koondu, nimetatakse hajuvaks.

---

**Näide 18.4** Vaatleme aritmeetilist rida

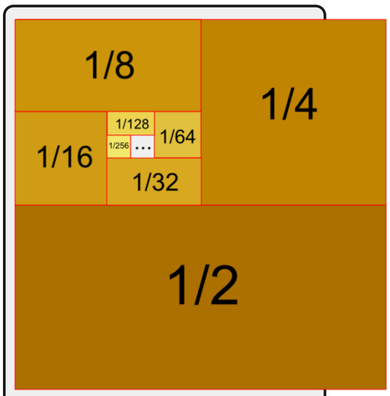
$$\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + \dots.$$

Rida hajub, sest

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \infty.$$

$\diamond \diamond \diamond$

## 18.3 Geomeetriline rida



Allikas:
http://en.citizendium.org/wiki

Algatuseks vaatleme rida

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

mis kujutab endast geomeetrilist rida teguriga $q=\frac{1}{2}$ ja see koondub arvuks 1. Viimast on lihtsam jälgida jooniselt, võttes ette ühikruudu ja hakates seda ruutu samm-sammult jagama kahega. Üksikute tükkide pindalade summa ei saa olla suurem kui esialgne ruudu pindala $S=1$.

**Lause 18.1**

Geomeetriline rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^k = 1+q+q^2+q^3+\dots \tag{18.4}$$

koondub, kui $|q|<1$ ja hajub, kui $|q|\geq 1$.

*Tõestus.* Olgu esiteks $q=1$. Siis

$$1+q+q^2+q^3+\cdots=1+1+1+1+\dots.$$

On selge, et rida $1+1+1+1+\dots$ hajub (osasumma $S_n=n$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$).

Kui $q=-1$, siis tekib vahelduvate märkidega rida

$$1+q+q^2+q^3+\cdots=1-1+1-1+1-1+\dots,$$

mis ei koondu, kuna $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1\neq 0$.

Olgu $|q|\neq 1$. Siis saame kirjutada

$$\begin{aligned}
S_n &= 1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1}{1-q}\cdot(1-q)\cdot\left(1+q+q^2+\cdots+q^n\right)\\
&=\frac{1}{1-q}\cdot\left(1-q+q-q^2+q^2-q^3+\cdots+q^n-q^{n+1}\right)=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.
\end{aligned}$$

Kui $|q|>1$, siis $|q^n|\to\infty$ ja

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Siin piirväärtus läheb kas lõpmatusse, või see üldse puudub, s.t. rida hajub.

Kui $|q|<1$, siis

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}.$$

Arvestasime, et $-1<q<1$ korral $q^n\to 0$, kui $n\to\infty$. Kuna ma saime välja kirjutada täpse tulemuse, suurus $\frac{1}{1-q}$ on lõplik arv, siis järelikult meie summa koondub, kui $|q|<1$. $\square$

**Märkus 18.1**

Lause tõestusest võib välja lugeda, et geomeetrilise rea osasumma avaldub valemiga

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1,$$

ja lisaks

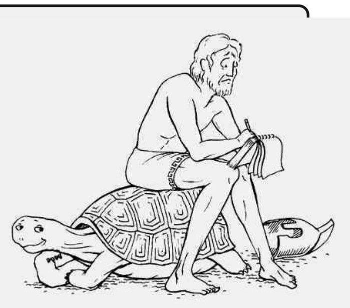
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1. \tag{18.5}$$

**Näide 18.5** Geomeetrilised read on mingil määral seotud ka Zenon'i paradoksidega ([5]). Vast kõige kuulsam nendest on Achilleus'e ja kilpkonna lugu. Achilleus annab kilpkonnale edumaad 10 meetrit. Kui Achilleus jookseb kilpkonnast 10 korda kiiremini, siis millal saab Achilleus kilpkonna kätte?

Võib hakata arutlema, et kui Achilleus on jooksnud 10 meetrit, siis kilpkonn on edasi läinud 1 meeter, kui Achilleus jookseb veel selle ühe meetri, siis on kilpkonn edasi läinud 10 cm, Achlleus jookseb 10 cm, aga kilpkonn on samas edasi läinud 1 mm jne jne jne. Täiesti loogiline arutelu annab tulemuseks, et Achilleus ei saagi kilpkonna kätte. Võib küll leida, et matemaatiliselt geomeetriline rida koondub, nimelt

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 10 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 10 \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11.(1),$$

s.t. läbides $\frac{100}{9}$ meetrit, saab Achilleus kilpkonna ikkagi kätte, kuid paneme tähele, et see eeldab lõpmatu arv kordi liikumist (viimane on paradoksi üks sügavamaid tahke, kuidas teha lõpliku ajaga midagi, milleks on vaja lõmatu arv samme).




Allikas: http://en.citizendium.org/wiki

"Zeno of Elea. How come you never take me out anymore?" "Why bother ... movement is a logical impossibility."

Tuntud on ka järgmine paradoks. Tudeng tahab tulla loengule, kuid selleks peab ta esiteks läbima pool teed kodust loengusaali. Selleks, et läbida see pool teed, peab ta esiteks läbima sellest pool ehk neljandiku. Esimese neljandiku läbimiseks tuleks siiski esmalt läbida kaheksandik jne jne. Sedasi arutledes võime järeldada, et tudeng ei saagi loengusaali poole liikuma hakata ... Zenon'i apooriad justkui näitavad, et liikumist ei olegi olemas. Teisalt, geomeetriline rida siiski koondub,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Geomeetrilise rea koondumine ei lahenda ära Zenon'i paradokside kõiki tahke. Ilmselt võib järeldada, et looduses ei saa siis teepikkus või aeg olla pidevad, kuid oh üllatust ... Zenon'il on teisigi paradokse (nt. noole paradoks), mis näitavad, et arvatavasti ei saa looduses kõik olla diskreetne (punktiviisiline).

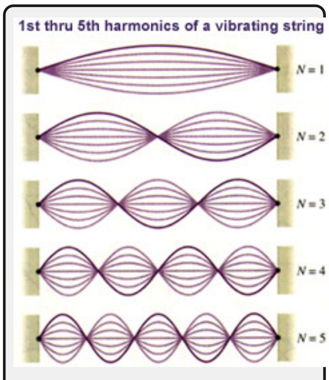
Zenon Eleast oli vanakreeka filosoof Elea koolkonnast, Parmenidese õpilane (u. 5. sajand e.Kr.).

Seega on paradokside sisu ja sõnum hoopis palju sügavam, palju filosoofilisem, kui esmapilgul triviaalne tõdemus, et vanad kreeklased ei mõistnud, mis on liikumine, mis on aeg, ruum jne.

Ausalt öeldes, et mõista me seda ju täielikult siiamaani ja Zenon'i apooriaid ei ole seni ajani rahuldavalt ära seletatud.

◇ ◇ ◇

## 18.4 Harmooniline rida



Allikas: WordPress.com

Harmooniliseks reaks nimetatakse rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots. \tag{18.6}$$

Me oleme kuulnud väljendit "harmooniline" pigem muusikas. Tõepoolest, seal on näiteks kasutusel helide jagamine oktavite kaupa (vt. joonis). Harmooniline rida tundub ennast ilmutavat meie ümber aga mujalgi.

**Näide 18.6** John Webb oma materjalis [9] küsib: "Kui tihti lüüakse ilmarekordeid?" Võtame näiteks sademete hulga. Kui tihti tuleb ette, et keskmine aastane sademete hulk on suurem kui seni teada oleval aastal?


Allikas: Wikipedia

Võtame vaatluse alla 100-aastase perioodi. Teeme eelduse, et sademete hulk on suures plaanis juhuslik, s.t. enamasti ühe aasta sademed ei ole mõjutatud eelmise või eelmiste aastate sademete hulgast. Võtame esimese aasta rekordaastaks. Sel juhul tõenäosus rekordiks on 100% ehk 1. Järgmisel aastal on 50%-line tõenäosus, et tuleb kas rohkem või vähem sademeid. Seega aastate arv on nüüd kokku $1 + \frac{1}{2}$. Kolmandal aastal on $\frac{1}{3}$ võimalus, et tuleb rohkem sademeid, kui eelneval kahel aastal. Aastate arv ise on aga $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Sedasi jätkates saame, et $n$ aasta peale tuleb

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n}$$

rekordaastat. Näeme, et viimane on harmoonilise rea osasumma. See summa kasvab väga aeglaselt, kuid ikkagi kasvab ja järgnevalt ka tõestame, et lõpmatute liikmetega harmooniline rida hajub.

Toome siia juurde tabeli harmoonilise rea osasummade suuruste kohta:

| $n$ | 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_n$ | 1 | 2.28 | 2.93 | 4.50 | 5.19 | 6.79 | 7.49 |

Sellised nähtused eksisteerivad meie ümber mujalgi. Võtame näiteks ühesuunalise liikluse, kus möödasõiduvõimalust ei ole. Sel juhul aeglaselt sõitva auto taha koguneb autode kogum, mis kõik sooviksid esimesest autost mööduda. Kui meil on $n$ autot, siis mitu sellist "gruppi" võiks tekkida? Vastus on jällegi harmooniline rida, kuna tegelikult otsime kõige aeglasemalt sõitvate autode arvu ja see tekib sama skeemi alusel, nagu ilmarekordid. Kuna kõik need grupid on kiiruse järgi kahanevas järjekorras, siis asuvad nad ka üksteisest rohkem hajutatult. Viimane tingib efekti, kus kitsa tunneli lõpus sõidavad autod üldjuhul kiiremini ja on väiksemates gruppides, kui tunnelisse sisenedes.

◇ ◇ ◇

---

**Näide 18.7** John Webb oma materjalis [9] toob veel sellise väga praktilise näite, mida saab laiendada ka teistele sarnastele olukordadele. Saekaater toodab laudu ja soovib samal ajal teada, milline on nende laudade minimaalne taluvuse piir välisjõule. Kõige lihtsam oleks muidugi kontrollida ükshaaval, võttes laua, suurendades sellele survet kuni laud puruneb. Selliselt saaks siis teada ka kõige väiksema jõu, mille all laud võib puruneda. Selline meetod on küll väga efektiivne ja täpne, aga kahjuks lõhub see ka kõik lauad.

Kuid on veel teine võimalus. Nimelt, esimese laua korral märgime lauda purustava jõu suuruseks $F_1$. Teisele lauale suurendame survet kuni väärtuseni $F_1$ ja mitte rohkem. Sedasi teeme ka teiste laudadega. Kui nüüd mingi laud peaks purunema väiksema surve all, siis märgimegi vähimaks purustavaks jõuks $F_* < F_1$ ja jätkame testimist selle väiksema jõuga. Sel juhul on teada, et eelmised lauad pidasid sellele survele vastu.

See kõik on loogiline, kuid huvitav on hoopis tulemus, et sellise meetodiga 100 laua pealt puruneb keskmiselt 5 lauda ja 1000 laua pealt 7-8 lauda. Need arvud on aga seotud harmoonilise rea osasummaga.

◇ ◇ ◇

**Lause 18.2**

Üldine harmooniline rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots \tag{18.7}$$

koondub, kui $\alpha > 1$ ja hajub, kui $\alpha \leq 1$.

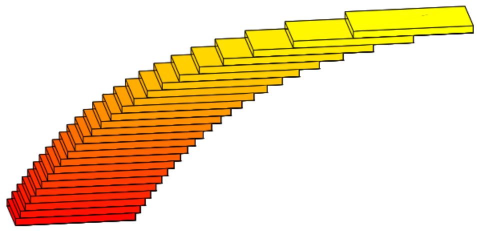
*Tõestus.* Tõestame tulemuse hetkel ainult harmoonilise rea ($\alpha = 1$) korral,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \dots + \tfrac{1}{16}\right) + \dots \\
&\geq 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \dots + \tfrac{1}{16}\right) + \dots \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Hiljem, peatüki lõpus, näitame ka ülejäänud juhud $\alpha \neq 1$.

Kuna rida $\sum \frac{1}{2}$ hajub, siis peab hajuma ka esialgne suurem rida $\sum \frac{1}{n}$. □

**Näide 18.8** Vaatleme veel ühte teoreetilist (kuid ehituses ka praktilist) näidet. Olgu meil antud doominokivid ja ülesanne, paigutada need üksteise otsa (igas kihis ainult üks kivi) nii, et ülemine kivi oleks alumisest võimalikult kaugel ja kogu süsteem jääks seejuures tasakaalu. Tundub esmapilgul uskumatuna, aga teoreetiliselt on võimalik ülemine kivi viia alumisest kuitahes kaugele (selleks on vaja muidugi lõpmatu arv kive). Osutub, et lahenduseks on panna need kivid harmoonilise rea põhimõttel. Ülemine (viimane) kivi asub eelmise peal, olles poole kehaga sellest üle. Ülalt teine asub ülalt kolmanda peal nii, et on 1/4 alumisest üle, siis 1/6 jne (üldliige on 1/(2n)).



Allikas: [7]

◇ ◇ ◇

## 18.5 Arvrea hajumise tunnus

**Teoreem 18.1**

**Koonduvuse tarvilik tingimus.** Kui rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \tag{18.8}$$

koondub, siis

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{18.9}$$

*Tõestus.* Eelduse järgi rida koondub, seega

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Siit saame, et

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

**Märkus 18.2**

NB! Koonduvuse tarvilik tingimus pole piisav rea (18.8) koonduvuseks. Tingimus ütleb lihtsalt seda, et kui piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ ei ole null, siis ei saa koondumisest juttugi olla ja kui piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ on null, alles siis tasub koonduvust uurima hakata. Seega saab koonduvuse tarviliku tingimuse põhjal selgeks teha ainult rea hajumist, mitte aga koondumist ennast.

**Märkus 18.3**

Tingimus $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ on samaväärne tingimusega $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$.

**Järeldus 18.1**

**Rea hajumise tunnus.** Kui

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| \neq 0, \tag{18.10}$$

siis rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \dots \tag{18.11}$$

hajub.

---

**Näide 18.9** Rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

hajub, kuna

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} |(-1)^{n+1}| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 18.10** Rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \dots$$

kohta ei oska me kohe midagi täpsemat öelda, kuna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Rea üldliige $u_n = \frac{1}{n}$ läheb nulli, kuid lause 18.2 järgi rida hajub.

◇ ◇ ◇

---

**Näide 18.11** Rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

kohta ei oska me kohe midagi täpsemat öelda, kuna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Rea üldliige $u_n = \frac{1}{n^2}$ läheb nulli ja lause 18.2 järgi rida koondub.

◇ ◇ ◇

---

**Näide 18.12** Rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

kohta ei oska me kohe midagi täpsemat öelda, kuna rea üldliige $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ läheb nulli, kuid lause 18.2 järgi rida hajub..

◇ ◇ ◇

## 18.6 Positiivsete arvridade koonduvustunnused

**Definitsioon 18.6**

Rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots \tag{18.12}$$

nimetatakse positiivseks reaks, kui $u_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Positiivsete ridade koonduvust saab kindlaks teha järgmiste tunnuste abil.

**Lause 18.3**

Võrdluslause ([1, 4]). Kui positiivsete ridade

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \ldots$$

korral

$$0 \leq u_n \leq v_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

siis rea $\sum v_n$ koonduvusest järeldub rea $\sum u_n$ koonduvus ja rea $\sum u_n$ hajuvusest järeldub rea $\sum v_n$ hajuvus.

*Tõestus.* Tõestuse võib leida õpikust [4]. □

**Näide 18.13** Rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^5}$$

korral

$$u_n = \frac{\sin^2(n)}{n^5} \leq \frac{1}{n^5} = v_n.$$

Kuna rida $\sum \frac{1}{n^5}$ koondub (üldine harmooniline rida astmega $\alpha = 5$), siis võrdluslause põhjal koondub ka esialgne rida $\sum \frac{\sin^2(n)}{n^5}$.

◇ ◇ ◇

**Näide 18.14** Rea

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

korral järeldub võrratusest $\ln(x) \leq x$, $x > 0$, et

$$u_n = \frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n} = v_n.$$

Kuna rida $\sum \frac{1}{n}$ hajub (harmooniline rida), siis võrdluslause põhjal hajub ka esialgne rida $\sum \frac{1}{\ln(n)}$.

◇ ◇ ◇

**Näide 18.15** Rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$$

korral järeldub võrratusest $\sqrt{n^3}+n > \sqrt{n^3}$, $n > 0$, et

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}+n} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} = v_n.$$

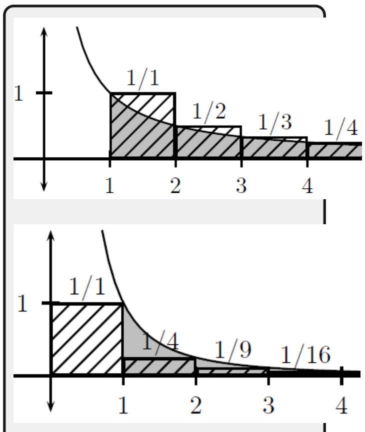
Kuna rida $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$ koondub (üldine harmooniline rida astmega $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), siis võrdluslause põhjal koondub ka esialgne rida.

◇ ◇ ◇

**Lause 18.4**

**Rea koonduvuse integraaltunnus** ([1, 3, 6]). Kui positiivse rea $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ korral $u_n = f(n)$ ja $f$ on pidev monotoonselt kahanev funktsioon piirkonnas $[a, \infty)$, siis vaadeldav rida ja päratu integraal $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ koonduvad (hajuvad) samaaegselt.

*Tõestus.* Teeme tõstuse läbi ainult $a = 1$ jaoks. On lihtne näha, et sama idee töötab ka mistahes muu $a \in \mathbb{R}$ korral. Olgu $u_n = f(n)$ ja funktsioon $f$ pidev monotoonselt kahanev piirkonnas $[1, \infty)$. Paneme tähele, et rida $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ kujutab endast ristkülikute summat, kus iga ristküliku alus $[n, n+1]$ on pikkusega 1 ja kõrgus on $u_n = f(n)$, $n = 1, \ldots, \infty$.



Allikas: [1]

Kuna $f$ on monotoonselt kahanev, siis funktsiooni $f$ joone alla jääv pindala on väiksem või võrdne antud ristkülikute pindalade summaga, s.t. kehtib

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Kui hajub päratu integraal $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, siis peab hajuma ka esialgne summa.

Teine võimalus alusega 1 ristkülikuid tekitada on võtta aluseks lõik $[n-1, n]$ ja kõrguseks $u_n = f(n)$, $n = 1, \ldots, \infty$. Sellisel juhul asub iga selline ristkülik funktsiooni $f$ joone all ja me saame

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + \sum_{n=2}^{\infty} u_n \leq u_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Kui koondub päratu integraal $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, siis peab koonduma ka summa $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. □

**Näide 18.16** Vaatleme üldist harmoonilist rida astmega $\alpha > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots, \quad \alpha > 1.$$

Sel juhul päratu integraal koondub:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{M\to\infty} \left( \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{x=1}^{x=M} \right) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{M^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Tulemuseks on lõplik arv $\frac{1}{\alpha-1}$. Rea koonduvuse integraaltunnuse tõttu koondub ka esialgne üldine harmooniline rida astmega $\alpha > 1$.

◇ ◇ ◇

**Näide 18.17** Vaatleme üldist harmoonilist rida astmega $0 < \alpha < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Sel juhul päratu integraal hajub:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{M\to\infty} \left( \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{x=1}^{x=M} \right) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left( M^{1-\alpha} - 1 \right) = \infty.$$

Rea koonduvuse integraaltunnuse tõttu hajub ka esialgne üldine harmooniline rida astmega $0 < \alpha < 1$.

◇ ◇ ◇

# Viited


[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[3] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.

[4] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[5] P. Lynds. Zeno's Paradoxes: A Timely Solution.

[6] N. Piskunov. Diferentsiaal- ja integraalarvutus. 2. köide. Tallinn Valgus, 1983.

[7] C. J. Sangwin. All a matter of balance - or a problem with dominoes. University of Birmingham, 2003.

[8] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.

[9] J. Webb. In perfect harmony (veebimaterjal). http://plus.maths.org/, 2000.