Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

19 Arvridade koonduvustunnused

Sisukord

19 Arvridade koonduvustunnused **213**

19.1 Vahelduvate märkidega read 214

19.2 Leibniz'i tunnus 215

19.3 Rea absoluutne ja tingimisi koonduvus 217

19.4 D'Alembert'i tunnus 219

19.5 Cauchy tunnus 220

Eksamiteemad

1. Leibniz'i tunnus vahelduvate märkidega rea kohta.
2. Omadus, et vahelduvate märkidega harmooniline rida koondub.
3. Absoluutselt koonduva ja tingimisi koonduva rea mõisted.
4. D'Alembert'i tunnus.
5. Cauchy tunnus.

19.1 Vahelduvate märkidega read

Olgu antud arvjada (u_n), kus $u_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

„The divergent series are the invention of the devil, and it is a shame to base on them any demonstration whatsoever. By using them, one may draw any conclusion he pleases and that is why these series have produced so many fallacies and so many paradoxes.“ (Neils Henrik Abel, norra matemaatik, 1802-1829)

Definitsioon 19.1

Rida

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot u_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n \cdot u_n + \ldots \tag{19.1}$$

nimetatakse vahelduvate märkidega reaks.

Näide 19.1 Vahelduvate märkide harmooniline rida on kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

Näiteks võib tuua veel järgmise rea:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{2k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots.$$

◇ ◇ ◇

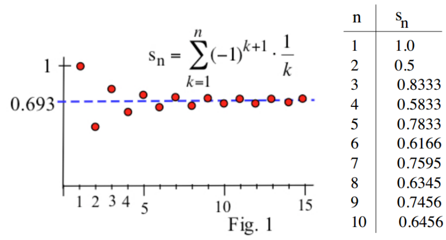


Fig. 1

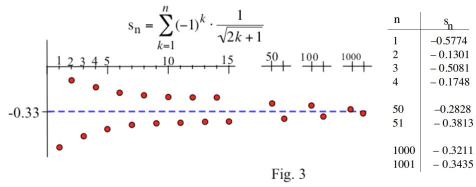


Fig. 3

Allikas: [3]

Näide 19.2 Kõige lihtsama rakendusena võiks tuua π arvutamise, näiteks Gregory-Leibniz'i reaga:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots,$$

kuid kahjuks näeb see küll ilus välja, aga on väga ebaefektiivne. Kui liita rea esimesed pool miljonit liiget, siis võib sellega saavutada ainult viis π õiget komakohta. Seda on ilmselgelt väga vähe.

Oluliselt kiiremini koondub Nilakantha (india 15. sajandi matemaatik, Kelallur Nilakantha Somayaji) rida:

$$\frac{1}{4}(\pi - 3) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{1}{2k \cdot (2k+1) \cdot (2k+2)} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots.$$

Analoogiliselt on välja töötatud teisigi ridu, sealhulgas efektiivsemaid, kui siintoodud.

Vahelduvate märkidega ridu võib eelkõige kohata näiteks võnkumistega seotud protsessides. Siinjuures, mõeldes näiteks Taylor'i valemist tuletatavale siinuse astmereale:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots,$$

kus saame arvrea, fikseerides argumendi x.

◇ ◇ ◇

19.2 Leibniz'i tunnus

Lause 19.1

Leibniz'i tunnus ([3, 5]). Kui $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ jaoks on täidetud tingimused

1. $u_n > 0$;
2. $u_n \geq u_{n+1}$ (üldliikmete jada on monotoonselt kahanev);
3. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$,

siis vahelduvate märkidega rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n \cdot u_n + \ldots \tag{19.2}$$

koondub.

Tõestus. Vaatleme esiteks paarituarvulisi osasummasid:

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0 - u_1 \geq 0, \\ S_3 &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 = S_1 + (u_2 - u_3) \geq S_1, \\ S_5 &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 = S_3 + (u_4 - u_5) \geq S_3, \\ &\ldots . \end{aligned}$$

Sedasi jätkates saame

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + (u_{2n} - u_{2n+1}) \geq S_{2n-1} \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Paarituarvuliste osasummade jada on positiivne ja monotoonselt kasvav.

Teisalt,

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots - u_{2n-1} + u_{2n} - u_{2n+1} \\ &= u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots - (u_{2n-1} - u_{2n}) - u_{2n+1} \leq u_0. \end{aligned}$$

Viimane ütleb meile kokkuvõtteks seda, et osasummade jada $S_1, S_3, S_5, \ldots$ on positiivne monotoonselt kasvav ja ülalt tõkestatud (suurusega u_0) jada.

Kõrval oleva teoreemi põhjal leidub lõplik piirväärtus

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = S.$$

Teoreem. Monotoonne jada on koonduv parajasti siis, kui ta on tõkestatud (vt. [5]).

Paarisarvuliste osasummade korral arvestame, et

$$S_{2n} = S_{2n+1} - (-u_{2n+1}) = S_{2n+1} + u_{2n+1},$$

millest piirväärtus tuleb

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n} = \lim_{n \to \infty} (S_{2n+1} + u_{2n+1}) = \lim_{n \to \infty} S_{2n+1} + \lim_{n \to \infty} u_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Koonduva jada iga osajada koondub samaks elemendiks, mis jadagi (vt. [5]) ja seega koondub terve osasummade jada $S_0, S_1, S_2, \ldots$ arvuks S, mis tähendabki, et rida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n$ koondub. $\square$

Näide 19.3 Vahelduvate märkidega harmooniline rida

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

koondub Leibniz'i tunnuse põhjal. Tõepoolest,

$$u_n = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} = u_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

On tõestatud, et vahelduvate märkidega harmooniline rida koondub arvuks $\ln(2) \approx 0.69315$.

◇ ◇ ◇

Näide 19.4 Vahelduvate märkidega rea

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} + \dots$$

kohta Leibniz'i tunnus ei tööta. On selge, et $\lim u_n = 0$, aga rea üldliige u_n ei ole monotoonselt kahanev. Nimelt,

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{4} < \frac{3}{6}, \dots.$$

Võib analüüsida, et rida hajub, kuna

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

ja viimane jada $S_2, S_4, S_6, \dots$ hajub (kui harmoonilise rea osasummade jada) ja järelikult hajub ka esialgne rida.

◇ ◇ ◇

Märkus 19.1

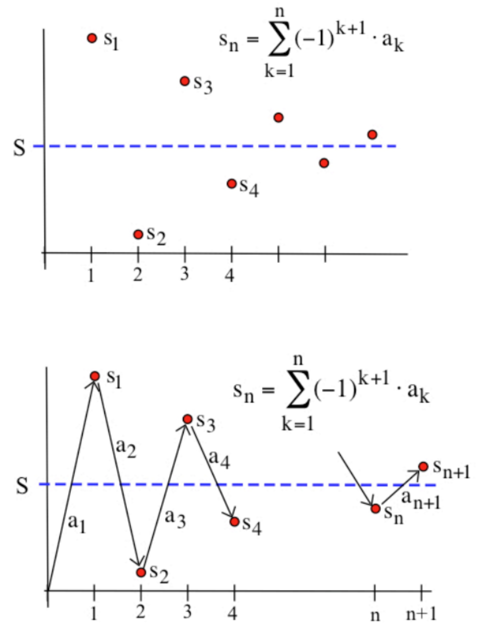
Leibniz'i tunnuse tõestusest koorub välja järgmine omadus. Kirjutame

$$R_n := |S - S_n| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot u_k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot u_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k \cdot u_k\right|. \tag{19.3}$$

Vahelduvate märkidega koonduva rea puhul kehtib jääkliikme hinnang

$$R_n = |S - S_n| < u_{n+1}. \tag{19.4}$$

Seega, kui lähendame $S \approx S_n$, siis absoluutne viga R_n on väiksem kui esimese ärajäetud liikme absoluutväärtus.



Allikas: [3]

Näide 19.5 Vaatleme vahelduvate märkidega harmoonilist rida

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

Viimane märkus lubab meil ligikaudu leida, kui suur peab olema n, et kehtiks näiteks

$$|S - S_n| < 0.001.$$

Selleks kirjutame

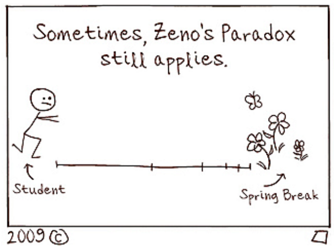
$$|S - S_n| < u_{n+1} < 0.001,$$

millest saame tingimuse

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} < 0.001$$

ehk $1000 < N + 1$ ja $N > 999$. Laias laastus tuleb võtta 1000 liiget, et osasumma S_{1000} ei erineks õigest vastusest S rohkem kui ± 0.001.

◇ ◇ ◇



Allikas: Internet

Näide 19.6 Leida ligikaudu rea

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k u_{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k - \sqrt{k}} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} - \frac{1}{3 - \sqrt{3}} + \frac{1}{4 - \sqrt{4}} + \ldots$$

summa. Leibniz'i tunnuse põhjal see rida koondub. Märkuses toodud omaduse järgi võime leida 10 esimese liikme summa $S_{10} \approx 1.1514$ ja saada hinnangu

$$|S - S_{10}| < u_{11} = \frac{1}{12 - \sqrt{12}} \approx 0.12.$$

Seega asub rea summa S lõigus $[1.15 - 0.12, 1.15 + 0.12] = [1.03, 1.27]$. Parema hinnangu saamiseks tuleks kasutada suuremat n väärtust.

◇ ◇ ◇

19.3 Rea absoluutne ja tingimisi koonduvus

Vaatleme kahte rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm) \frac{1}{n} = \pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm \ldots$$

ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm) \frac{1}{n^2} = \pm 1 \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{9} \pm \frac{1}{16} \pm \ldots .$$

Siinjuures oleme märgi kirjutanud kujul $\pm$ mõeldes seda, et märk võib olla, kas pluss või siis miinus ja seda iga liikme juures eraldi (sõltumata teistest liikmetest). Kui esimeses reas oleksid kõik märgid plussid, saaksime hajuva harmoonilise rea. Kui esimeses reas oleksid kõik märgid miinused, siis saaksime samuti hajuva harmoonilise rea. Kui märgid iga liikme juures vahelduksid, siis saaksime koonduva vahelduvate märkidega harmoonilise rea.

Analoogiliselt teise reaga. Kui kõik märgid oleksid plussid või miinused, siis saaksime koonduva üldistatud harmoonilise rea astmega $\alpha = 2 > 1$. Kui märgid oleksid vahelduvad, siis saaksime ikkagi koonduva rea (Leibniz'i tunnuse põhjal).

Kui me esitame küsimuse „Millal toodud rida koondub?“, siis esimesel juhul sõltub vastus märkide paiknemisest (tingimisi koonduvad read) ja teisel juhul saaksime koonduva rea sõltumata märkide paiknemisest (absoluutselt koonduvad read).

Definitsioon 19.2

Rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ koondub.

Näide 19.7 Rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

koondub absoluutselt, kuna

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

on geomeetriline rida kordajaga $q = \frac{1}{2}$ ja viimane koondub.

◇ ◇ ◇

Märkus 19.2

Rea absoluutsest koonduvusest järeldub selle rea koonduvus, vastupidi mitte.

Definitsioon 19.3

Rida, mis koondub, kuid ei koondu absoluutselt, nimetatakse tingimisi koonduvaks.

Näide 19.8 Rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

koondub tingimisi (koondub Leibniz'i tunnuse põhjal), samas rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

hajub (harmooniline rida).

◇ ◇ ◇

Märkus 19.3

Absoluutselt koonduva rea puhul ei ole summeerimisjärjekord oluline. Küll aga on kummaline, et tingimisi koonduva rea korral on see oluline. Vaatleme näiteks tingimisi koonduvat vahelduvate märkidega harmoonilist rida

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.$$

Kui me vahetame summeerimise järjekorda, valides eraldi paaritud ja paarisliikmed, siis saame

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\to\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\right)\to\infty-\infty.$$

Tegelikult on võimalik järjekorda muuta ka nii, et summaks on mistahes valitud reaalarv (vt. [3]).

19.4 D'Alembert'i tunnus

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717 - 1783) oli prantsuses matemaatik, füüsik, filosoof ja muusikateoreetik.

Allikas: Internet

Vanemas eas kirjutas ta matemaatikast ja loodusteadusest Denis Diderot' kuulsale entsüklopeediale, mis püüdis koondada inimkonna kõiki selleks ajaks kogunenud teadmisi. Nooremana tuletas ta esimesena välja pillikeele võnkumist kirjeldava lainevõrrandi. D'Alembert püüdis välja töötada ka piirväärtuse mõistet, kuid selles ta nii edukas ei olnud.

Tema sõnastus piirväärtuse kohta oli midagi sellist: "Öeldakse, et üks suurus on teise suuruse piirväärtuseks, kui teine nest võib läheneda esimesele enam, kui mis tahes muu suurus ega ületa seda suurust, millele ta läheneb; nii et suuruse ja tema piirväärtuse erinevus on lõpuks märkamatu." ([2]).

Lause 19.2

D'Alembert'i tunnus ([5]). Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=D, \tag{19.5}$$

siis rida $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

1. koondub absoluutselt, kui $D<1$;
2. hajub, kui $D>1$.
3. Kui $D=1$, siis jääb küsimus lahtiseks.

Näide 19.9 Uurime rea

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(-3)^n}$$

koonduvust. Leiame

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty>1,$$

seega vaadeldav rida hajub d'Alembert'i tunnuse põhjal.

◇ ◇ ◇

Näide 19.10 Uurime rea

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,2^n}{5^n}$$

koonduvust. Leiame

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,2^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n\,2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\,(n+1)}{5\,n}=\frac{2}{5}<1,$$

seega vaadeldav rida koondub absoluutselt d'Alembert'i tunnuse põhjal.

◇ ◇ ◇

Näide 19.11 Uurime rea

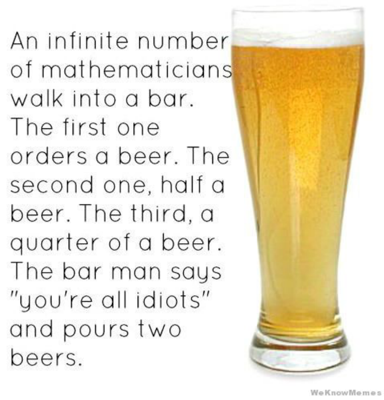
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \sin\left(\frac{\pi}{7^n}\right)$$

koonduvust. Arvestame, et protsessis $n \to \infty$ kehtib $\sin(1/n) \sim 1/n$. Leiame

$$D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7^{n+1}}\right)}{4^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot \frac{\pi}{7^{n+1}}}{\frac{\pi}{7^n}} = \frac{4}{7} < 1,$$

seega vaadeldav rida koondub absoluutselt d'Alembert'i tunnuse põhjal.

◇ ◇ ◇



Allikas: Internet

19.5 Cauchy tunnus

Lause 19.3

Cauchy tunnus ([5]). Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = C, \tag{19.6}$$

siis rida $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

1. koondub absoluutselt, kui $C < 1$;
2. hajub, kui $C > 1$.
3. Kui $C = 1$, siis jääb küsimus lahtiseks.

Näide 19.12 Uurime rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+4}$$

koonduvust. Leiame

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+4}} = 1.$$

Seega Cauchy tunnus ei tööta. Rida ei koondu absoluutselt, kuna

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1} \frac{1}{n+4}$$

on harmooniline rida, mis hajub. Esialgne rida on vahelduvate märkidega rida ja kehtivad tingimused

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+4} = 0, \quad u_n = \frac{1}{n+4} > \frac{1}{n+5} = u_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Seega Leibniz'i tunnuse põhjal koondub meie esialgne rida tingimisi.

◇ ◇ ◇

Näide 19.13 Uurime rea

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$$

koonduvust. Leiame

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}}=\frac{1}{2}<1.$$

Seega vaadeldav rida koondub absoluutselt Cauchy tunnuse põhjal.

◇ ◇ ◇

Allikas: Internet

Märkus 19.4

Võtame kõik vaadeldavad koondumistunnused kokku:

1. Kui $\lim u_n \neq 0$, siis rida hajub sõltumata rea liikmete märkidest.
2. Võrdluslause kehtib ainult positiivse rea kohta.
3. Integraalne tunnus kehtib ainult positiivse rea kohta.
4. Leibniz'i tunnus kehtib ainult vahelduvate märkidega rea kohta.
5. D'Alembert'i tunnus kehtib sõltumata rea liikmete märkidest.
6. Cauchy tunnus kehtib sõltumata rea liikmete märkidest.

Viited

[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] R. Flood, R. Wilson. Kuulsad matemaatikud. Valgus, 2014.

[3] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[4] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.

[5] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[6] N. Piskunov. Diferentsiaal- ja integraalarvutus. 2. köide. Tallinn Valgus, 1983.

[7] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.