Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

2 Kompleksarvu trigonomeetriline kuju

Sisukord

2 Kompleksarvu trigonomeetriline kuju **13**

2.1 Kompleksarvu trigonomeetriline kuju 14

2.2 Siinus ja koosinus 16

2.3 Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega 17

2.4 Kompleksarvu n-astme juured 19

2.5 Kompleksarvude kasutamine piltide pööramisel * 21

Kontrolltöö teemad

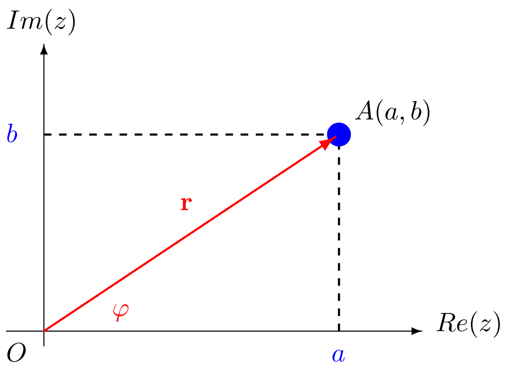
1. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju, teisendamine algebralisele kujule ja vastupidi (näide 2.1, näide 2.2 lihtsamal juhul).
2. Mis on kompleksarvu argument ja kuidas seda leida (märkus 2.1).
3. Teadma siinuse ja koosinuse väärtusi enamlevinud nurkade korral ning oskama joonestada siinuse ja koosinuse graafikuid.
4. Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega (näide 2.3).
5. Teadma de Moivre'i valemit ja oskama seda kasutada (näide 2.4-2.6).
6. Oskama leida n-astme juuri (näited 2.7-2.8).

Eksamiteemad

1. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju.
2. Kompleksarvu argument.
3. Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega ning nende geomeetriline tähendus.
4. De Moivre'i valem (ilma tõestuseta).
5. Kompleksarvu n-astme juured.

2.1 Kompleksarvu trigonomeetriline kuju

Tähistame kohavektori **OA** pikkuse $|z| = |\mathbf{OA}|$ sümboliga r ning olgu φ nurk vektori **OA** ja x-telje positiivse suuna vahel.



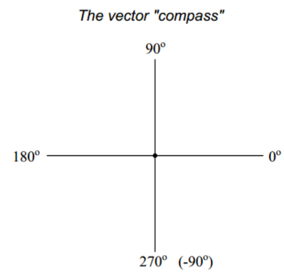
Siis siinuse ja koosinuse seostest täisnurkses kolmnurgas saame

$$b = r\sin\varphi, \quad a = r\cos\varphi,$$

ning

$$z = a + b\,i = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi,$$

millest saamegi kompleksarvu trigonomeetriline kuju.



Definitsioon 2.1

Avaldist

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} \cdot (\cos\varphi + \mathbf{i} \cdot \sin\varphi) \tag{2.1}$$

nimetatakse kompleksarvu z trigonomeetriliseks kujuks.

Kompleksarvu $z = a + b\,i$ võib vaadelda kui reaalarvude paari (a, b) või siis reaalarvude paari $< r, \varphi >$. Tegemist on lihtsalt kahe erineva koordinaatide süsteemiga.

Reaalarvude paar (a, b) näitab kompleksarvu z koordinaate tasandil. Punkti z jõudmiseks tuleb liikuda a ühikut reaaltelje ja b ühikut imaginaartelje suunas.

Paari $< r, \varphi >$ puhul tuleb punkti z jõudmiseks pöörata reaaltelje positiivsest poolest vastupäeva φ radiaani (liikumine töötab ka kraadides) mööda ringjoont raadiusega r.

Definitsioon 2.2

Arv r on kompleksarvu z moodul $|z|$. Arvu φ nimetatakse ka kompleksarvu z argumendiks ja tähistatakse

$$\varphi = \arg(z).$$

Märkus 2.1

Kompleksarvu $z = a + b\,i$ argumendi φ leidmisel tuleb jälgida a ja b märki. Kuigi φ on loogiliselt tuletatav, võib jälgida järgmist skeemi:

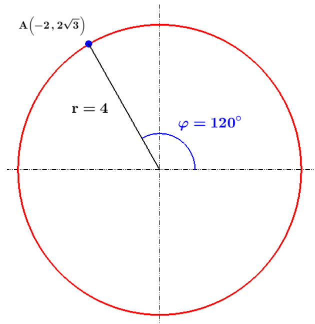
$$\theta := \arctan\left|\frac{b}{a}\right| \quad \text{ja vastavalt veeranditele} \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{\varphi = \pi - \theta}$	$\boldsymbol{\varphi = \theta}$
$a < 0,\ b > 0$	$a > 0,\ b > 0$
$a < 0,\ b < 0$	$a > 0,\ b < 0$
$\boldsymbol{\varphi = \pi + \theta}$	$\boldsymbol{\varphi = -\theta}$

Näide 2.1

Viia kompleksarv $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ trigonomeetrilisele kujule.

Märgime, et punkt z asub teises veerandis ja z koordinaadid tasandil on $(a, b) = (-2, 2\sqrt{3})$. Sel juhul moodul



$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4.$$

Leiame

$$\theta = \arctan \left| \frac{b}{a} \right| = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{2} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

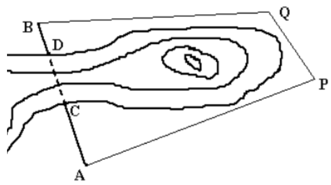
Vastuse võimegi kirjutada näiteks kujul

$$z = 4\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi), \quad \varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

Siinjuures $\frac{2}{3}\pi$ radiaani on 120 kraadi. Punkti z jõudmiseks peaksime liikuma 120 kraadi vastupäeva mööda ringjoont raadiusega $r = 4$. Sama tulemuse annab liikumine samal ringjoonel, aga 240 kraadi päripäeva.

◇ ◇ ◇

Näide 2.2 Insener soovib rajada sirgjoonelise raudtee linnast A linna B. Punktist C punkti D tuleb rajada tunnel läbi mäe. Mõõtmisi saab teha vaid maa peal, kuid kahjuks varjab mägi vaatevälja linnade A ja B vahel. Võimalik on mõõta mäe ümber vahemaa ja nurk suure puuni (punkt P), kivirahnuni (punkt Q) ja punktis Q tekib silmside linnaga B. Mõõtmised:



(Allikas: [2])

$$AP(10.13\,km, 19.8\,°), \quad PQ(3.17\,km, 125.3\,°), \quad QB(8.68\,km, -177.4\,°).$$

Milline on linnade A ja B vaheline kaugus ja millise nurga all tuleks hakata linnast A liikuma?

Üks võimalikke lahendusi on AB leidmiseks kasutada vektorite liitmist. Viimast saab edukalt teha kompleksarvu algebralise kuju kaudu,

$$\begin{aligned}
z_1 &= 10.13\,(\cos(19.8\,°) + i\,\sin(19.8\,°)) && \approx 9.53 + 3.43\,i,\\
z_2 &= 3.17\,(\cos(125.3\,°) + i\,\sin(125.3\,°)) && \approx -1.83 + 2.59\,i,\\
z_3 &= 8.68\,(\cos(-177.4\,°) + i\,\sin(-177.4\,°)) && \approx -8.67 - 0.39\,i.
\end{aligned}$$

Märgime, et koordinaadid algebralises kujus töötavad punkti A suhtes. Edasi on juba lihtne,

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = -1.03 + 5.63\,i,$$

$$|z| = \sqrt{1.13^2 + 5.63^2} \approx 5.72, \quad \arg(z) \approx \pi - 1.39 = 1.75\,rad \approx 100.3°.$$

Saime, et linnade A ja B vaheline kaugus on 5.72 km ja linnast A tuleks liikuma hakata 100.3° nurga all.

◇ ◇ ◇

Märkus 2.2

Teatud ühesuse probleemide vältimiseks kasutatakse kompleksarvu argumendi peaväärtust $\varphi = \arg z$, kus $0 \leq \varphi < 2\pi$ või siis hoopis $-\pi < \varphi \leq \pi$. On selge, et nurga $2\pi + \varphi$ võrra pööramine viib meid samasse punkti, kui nurga φ võrra pööramine.

Kaks trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvu

$$z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \quad \text{ja} \quad z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

on võrdsed parajasti siis, kui

1. nende moodulid on võrdsed ($r_1 = r_2$);
2. nende argumentide vahe on 2π-kordne, s.t. $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Näiteks on

$$\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)$$

ja

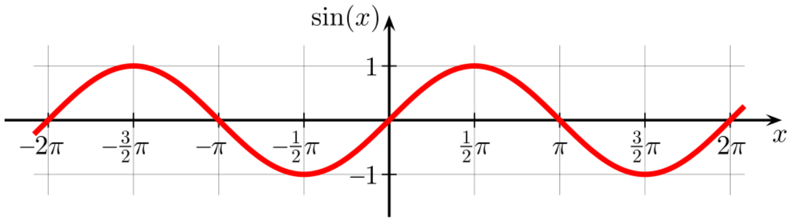
$$\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right).$$

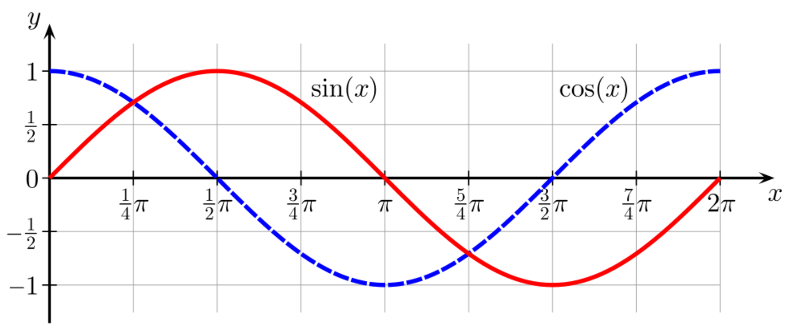
omavahel võrdsed kompleksarvud.

2.2 Siinus ja koosinus

Tuletame siinkohal meelde mõningad elementaarsed omadused siinus- ja koosinusfunktsioonidele.

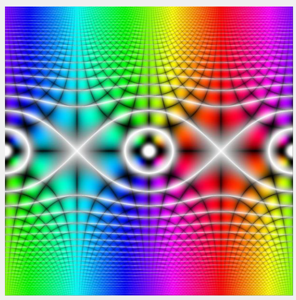
nurk φ °	nurk φ rad	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
120	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0





(Graafikud: Wikipedia)

Rääkides kompleksarvudest, siis võib näiteks $\sin z$ (z on kompleksarv !!) graafikuks saada midagi üsna müstilist (heledus on seotud mooduliga $|\sin z|$ ja saturatsioon on seotud suurustega $Re(\sin z)$ ja $Im(\sin z)$):



$\sin(z)$, $z \in \mathbb{C}$,
Allikas: Wikipedia

Siinuse ja koosinuse väärtused jäävad alati lõiku $[-1, 1]$.

Siinus on paaritu ja koosinus on paarisfunktsioon, s.t.

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi, \quad \cos(-\varphi) = \cos\varphi.$$

Igaks juhuks tuletame ka meelde, et

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

2.3 Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega

Olgu antud kaks kompleksarvu trigonomeetrilisel kujul

$$z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1) \quad \text{ja} \quad z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2).$$

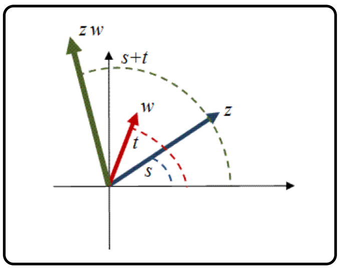
Siis kahe kompleksarvu korrutamise ja jagamise kohta kehtivad järgmised reeglid:

1. korrutamisel moodulid korrutatakse ja argumendid liidetakse,

$$\mathbf{z_1} \cdot \mathbf{z_2} = \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2}\,[\cos(\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{\varphi_2}) + \mathbf{i}\,\sin(\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{\varphi_2})]\,,$$

2. jagamisel moodulid jagatakse ja argumendid lahutatakse,

$$\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}} = \frac{\mathbf{r_1}}{\mathbf{r_2}}\,[\cos(\boldsymbol{\varphi_1} - \boldsymbol{\varphi_2}) + \mathbf{i}\,\sin(\boldsymbol{\varphi_1} - \boldsymbol{\varphi_2})], \quad r_2 \neq 0.$$



Reeglid on lihtsalt tuletatavad trigonomeetrilististest valemitest $\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2)$ ja $\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2)$ kohta. Näiteks,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\,[\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1] \cdot r_2\,[\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2]$$

$$= r_1 \cdot r_2\,[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i\,(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1)]$$

$$= r_1 \cdot r_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\,.$$

Märkus 2.3 Oma olemuselt annavad korrutamise ja jagamise reeglid trigonomeetrilisel kujul lihtsa matemaatilise aparatuuri vektorite pööramiseks või punktihulga liigutamiseks tasandil.

Kui te tahate mingit punkti z tasandil liigutada samal ringjoonel 90 kraadi vastu päeva, siis tuleb vastavat punkti z korrutada kompleksarvuga i. Kui soovite punkti keerata 45 kraadi päripäeva, siis tuleb arvu z korrutada kompleksarvuga $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ jne.

Näide 2.3 Leida $z_1 \cdot z_2$ ja $\frac{z_1}{z_2}$, kui

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Eeltoodud valemite põhjal

$$z_1 \cdot z_2 = 8\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\,\sin\frac{5}{12}\pi\right), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{12}\pi + i\,\sin\frac{1}{12}\pi\right).$$

◇ ◇ ◇

Kompleksarvu täisarvulisel astendamisel kehtib **de Moivre'i valem**

$$\mathbf{z^k} = \mathbf{r^k} \cdot (\cos(\mathbf{k} \cdot \varphi) + \mathbf{i} \cdot \sin(\mathbf{k} \cdot \varphi)), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Tõestus. Näitame viimast. Esiteks on selge, et valem kehtib $k = 0$ korral ja $k = 1$ korral (trigonomeetrilise kuju tõttu). Kasutame matemaatilist induktsiooni. Oletame, et valem kehtib suvalise naturaalarvu $k \in \mathbb{N}$ korral. Näitame, et siis kehtib de Moivre'i valem ka $k+1$ korral. Kirjutame

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z = r^k(\cos(k\,\varphi) + i\,\sin(k\,\varphi)) \cdot r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \\ &= r^{k+1}(\cos((k+1)\,\varphi) + i\,\sin((k+1)\,\varphi)). \end{aligned}$$

Kui k on negatiivne täisarv, siis

$$\begin{aligned} z^{-|k|} &= \frac{1}{z^{|k|}} = \frac{\cos(0) + i\,\sin(0)}{r^{|k|}(\cos(|k|\,\varphi) + i\,\sin(|k|\,\varphi))} \\ &= \frac{1}{r^{|k|}}(\cos(-|k|\,\varphi) + i\,\sin(-|k|\,\varphi)) = r^k(\cos(k\,\varphi) + i\,\sin(k\,\varphi)). \end{aligned}$$

□

Märkus 2.4

De Moivre'i valem ei kehti suvalise reaalarvu $\nu \in \mathbb{R}$ jaoks, vaid ainult täisarvude $n \in \mathbb{Z}$ korral. Näiteks, $\sqrt{-1} = \pm i$. De Moivre'i valem annaks aga ainult ühe vastuse,

$$\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} = (\cos\pi + i\,\sin\pi)^{\frac{1}{2}} \to \cos\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) + i\,\sin\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = i.$$

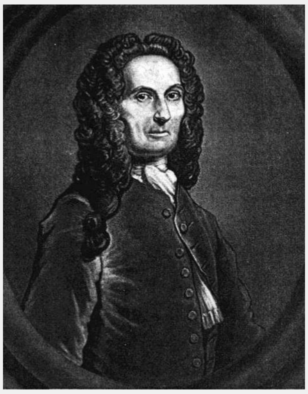
Ratsionaalsete astendajate $n \in \mathbb{Z}$ korral tekib seega astendamise ühesuse probleem. De Moivre'i valem kehtib ratsionaalsete astendajate korral juhul, kui kompleksarv z kirjutada perioodilisel kujul (sellest räägime lähemalt kompleksarvu z juurimise peatükis):

$$z = r\,(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\,\sin(\varphi + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Irratsionaalarvude korral võib hooletu kasutamisega saada aga hoopis veidramaid tulemusi. Näiteks, kasutame 2^π leidmiseks de Moivre'i valemit (**tegelikult nii ei tohiks seda teha**):

$$\begin{aligned} 2^\pi &= [2\,(\cos(2\pi) + i\,\sin(2\pi))]^\pi \to 2^\pi\left(\cos(2\pi^2) + i\,\sin(2\pi^2)\right) \\ &\approx 5.6 + 6.9\,i. \end{aligned}$$

Saime reaalarvu asemel kompleksarvu. Esmapilgul "võrdsetel" nurkadel 0 ja 2π radiaani on astendamisel siiski tähtis erinevus. Tegekult ei ole vastus otseselt vale, meie tulemus on üks võimalikust (lõpmatust hulgast).



Allikas : Wikipedia

Abraham de Moivre
(1667 - 1754)

oli prantsuse päritoluga inglise matemaatik, kes on tuntud ka tõenäosusteooria vallas. De Moivre ei avaldanud kunagi valemit ilmutatud kujul ja valemi tõestas hoopis šveitsi matemaatik Leonhard Euler (1707 - 1783). De Moivre avaldas valemi ilmutamata kujul (mille jätame selle keerukuse tõttu siinkohal vahele) aastal 1707 ning teeb vastava märkuse veel aastal 1722 (vt. [4]), millest saab teatud asendustega tuletada valemi

$$\begin{aligned} &[\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi]^n \\ &= \cos(n\varphi) \pm \sqrt{-1}\sin(n\varphi), \\ &n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Meie kasutatava ilmutatud kuju võttis kasutusele samuti Euler, kes üldistas kompleksarvude astendamist ka reaalsete astmete $\nu \in \mathbb{R}$ jaoks.

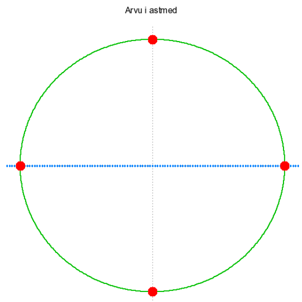
Londoni kohvikud olid omamoodi informatsiooni- ja kultuurikeskused, kus tolle aja teadlased said uut infot ja arutlesid huvitavaid probleeme. Sealhulgas mängiti ka malet ning viimasest ei jäänud eemale ka de Moivre, kes andis muuhulgas lahenduse ratsu teekonnale malelaual (selle esmapilgul lihtsa ja teisejärgulise probleemiga on kokku puutunud paljud väga kuulsad matemaatikud nagu näiteks Euler, Legendre, Vandermonde). Mingil määral võib analoogi leida meie Werneri kohvikuga Paul Kerese aegadest.

Näide 2.4 Leiame imaginaararvu i astmed. Esiteks, $|i| = 1$ ja $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Kompleksarvu korrutamisel muutub uue arvu nurk korrutatava arvu nurga võrra, meie juhul 90 kraadi. Seega

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \ldots.$$

Kõik astmed asuvad ühikringjoonel ja on üksteisest eraldatud 90 kraadi.

◇ ◇ ◇



Näide 2.5 Mis oleks lihtsam, kui leida ühikringi elemendi $z = \cos(50°) + i \cdot \sin(50°)$ 7. astet? Kirjutame

$$z^7 = \cos(7 \cdot 50°) + i \cdot \sin(7 \cdot 50°) = \cos(350°) + i \cdot \sin(350°).$$

◇ ◇ ◇

Näide 2.6 Leida $(1-i)^5$.
Viime $z = 1 - i$ trigonomeetrilisele kujule,

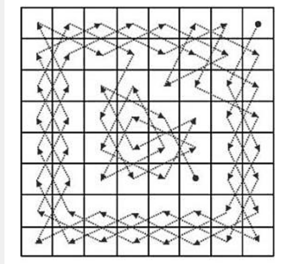
$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Järgmiseks kasutame de Moivre'i valemit,

$$(1-i)^5 = \sqrt{32}\left(\cos\frac{5}{4}\pi - i\,\sin\frac{5}{4}\pi\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) = -4 + 4\,i.$$

◇ ◇ ◇

Räägitakse, et oma viimastel aastatel aitas kohvikus malemängimine de Moivre'l pisut leevendada oma rahalist olukorda.



Ratsu teekond (Allikas: [1])

19. sajandi London Slaughter's Coffeehouse (Allikas: [1])

Legend pajatab, et de Moivre ennustas täpselt ette oma surmapäeva. Tervislikel põhjustel magas de Moivre iga päev kaua. Märgates, et ta magab iga päev u. 15 minutit kauem kui eelmisel päeval, arvutas ta välja, millal jõuab kätte 24-tunnine uneperiood ... see saabus 27. novembril 1754.

Ülesanne 2.1 Näidata, et kui kompleksarv z asub ühikringjoonel, siis kehtib võrdus

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2.4 Kompleksarvu n-astme juured

Definitsioon 2.3
Kompleksarvu z n-astme juureks nimetatakse iga kompleksarvu w, mille korral $w^n = z$.

Igal nullist erineval kompleksarvul on n erinevat n-astme juurt, mis leitakse valemiga

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + \mathbf{2k}\pi}{\mathbf{n}}\right) + \mathbf{i} \cdot \sin\left(\frac{\varphi + \mathbf{2k}\pi}{\mathbf{n}}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.4}$$

Paneme tähele, et kõik juured asuvad komplekstasandil raadiusega $\sqrt[n]{r}$ antud ringjoone peal.

Märkus 2.5

Avaldise saab lihtsalt meelde jätta, kui esiteks kirjutada kompleksarv z alternatiivsel trigonomeetrilisel kujul

$$z = r\,(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\ \sin(\varphi + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z},$$

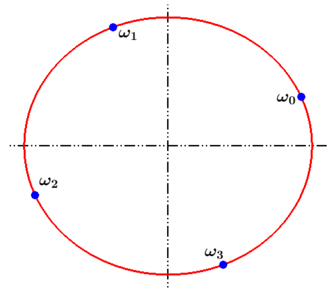
ja edasi võib juba kasutada de Moivre'i valemit ratsionaalsete astmete jaoks

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i\ \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right), \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Siinkohal ei ole karta vale tulemust, kuna z on kirjutatud perioodilisel kujul ja juurimise tulemus tuleb mitteühene. Tähtis on meelde jätta, et igal kompleksarvul $z \neq 0$ on alati n erinevat juurt.

Näide 2.7 Leida kompleksarvu $z = 2 \cdot i$ neljanda astme juured.
Kirjutame

$$\sqrt[4]{2 \cdot i} = \sqrt[4]{2} \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} \right) + i\ \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

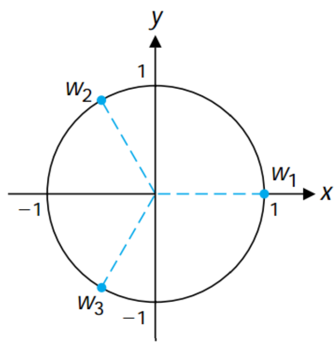


Eraldi välja kirjutatuna saame

$$\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{8} + i\ \sin\tfrac{\pi}{8}\right) \\
w_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{5}{8}\pi + i\ \sin\tfrac{5}{8}\pi\right) \\
w_3 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{9}{8}\pi + i\ \sin\tfrac{9}{8}\pi\right) \\
w_4 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{13}{8}\pi + i\ \sin\tfrac{13}{8}\pi\right).
\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 2.8 Reaalarvude korral tundub esmapilgul petlikult, et siin on asi triviaalselt lihtne... Kahjuks või õnneks mitte. Leida kompleksarvu $z = 1$ kolmanda astme juured.
Arvestades eelnevat, kirjutame



$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1} &= \cos\left(\tfrac{0+2k\pi}{3}\right) + i\ \sin\left(\tfrac{0+2k\pi}{3}\right) \quad = \cos\left(k\tfrac{2}{3}\pi\right) + i\ \sin\left(k\tfrac{2}{3}\pi\right) \\
&= \cos\left(k\,120^\circ\right) + i\ \sin\left(k\,120^\circ\right), \quad k = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Eraldi välja kirjutatuna saame

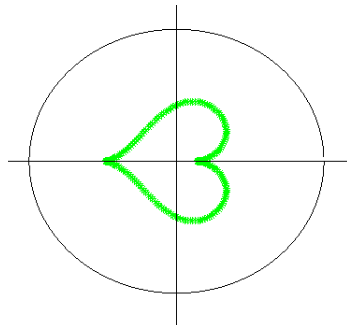
$$\begin{aligned}
w_1 &= \cos 0 + i\ \sin 0 &&= 1, \\
w_2 &= \cos\tfrac{2}{3}\pi + i\ \sin\tfrac{2}{3}\pi &&= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i, \\
w_3 &= \cos\tfrac{4}{3}\pi + i\ \sin\tfrac{4}{3}\pi &&= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et juuri võiksime leida ka ilma erivalemiteta. Siin ülesandes peab ühikringjoonel asuma 3 erinevat juurt. Seega peavad nad asuma üksteisest 360/3 = 120 kraadi eraldatuna. Kuna 1 on reaalarv, siis üks juurtest asub reaalteljel ja teised kaks ±120 kraadi pööratuna samal ringjoonel.

◇ ◇ ◇

2.5 Kompleksarvude kasutamine piltide pööramisel *

Vaatleme konkreetsemalt südame graafikut ja moodustame südame punktide koordinaatidest kompleksarvulise vektori



$$A = (z_1, z_1, \dots z_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neile, keda teema rohkem huvitab, võib tuua, et sellise südame graafik polaarkoordinaatides on antud valemiga

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = 13\cos(\varphi) - 5\cos(2\varphi) - 2\cos(3\varphi) - \cos(4\varphi) \\ y & = 16\sin^3(\varphi) \end{array} \right\}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

mille abil saame vektori A jaoks kompleksarvud

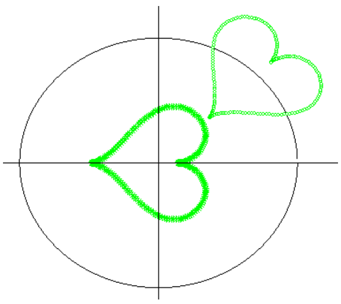
$$z_j = \Big[13\cos(\varphi) - 5\cos(2\varphi) - 2\cos(3\varphi) - \cos(4\varphi)\Big] + \mathbf{i} \cdot 16\sin^3(\varphi), \quad \varphi = j\,\frac{2\pi}{n}.$$

Meid huvitab järgnevalt, kuidas liigutada või pöörata kogu südame graafikut ühe korraga ja seda ilma eriliselt keeruliste valemiteta. Lahendus on elegantselt lihtne. Järgnevalt peame arvestama, et kasutame kohati programmeerimisel kasutatavaid omistamisi.

- Esiteks pöörame südat näiteks 45°, selleks korrutame vektorit A punktiviisiliselt ühikringi elemendiga $cos(45°) + i \cdot \sin(45°)$:

  $$A \leftarrow A \cdot (cos(45°) + i \cdot \sin(45°)) \,.$$

- Nihutamaks tulemust mingile kaugusele, liidame saadud vektorile näiteks vektori C, mis koosneb üksnes arvudest $25 + 25 \cdot i$,

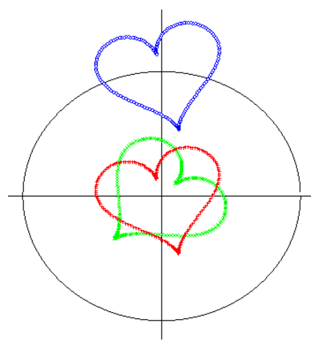
  $$B = A + C.$$

  Vektori B punktid kanname graafikule (esialgses asendis süda on samuti graafikul). Südame keskpunkt asub ringjoonel raadiusega $|25+25 \cdot i|$.

- Pöörame viimases asendis südat näiteks 60° ümber oma telje, selleks korrutame viimati saadud vektorit A punktiviisiliselt suurusega $(cos(60°) + i \cdot \sin(60°))$:

  $$A \leftarrow A \cdot (cos(60°) + i \cdot \sin(60°)) \,.$$

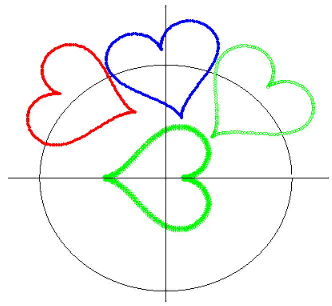
- Järgnevalt viime vektori punktid uuesti ringjoonele ja liigutame südat ringjoonel 45° kraadi vastupäeva ... säilitades viimati saadud asendi. Selleks tuleb lihtsalt korrutada vektorit $C = 25 + 25 \cdot i$ suurusega $(cos(45°) + i \cdot \sin(45°))$ ja liita saadud tulemusele,

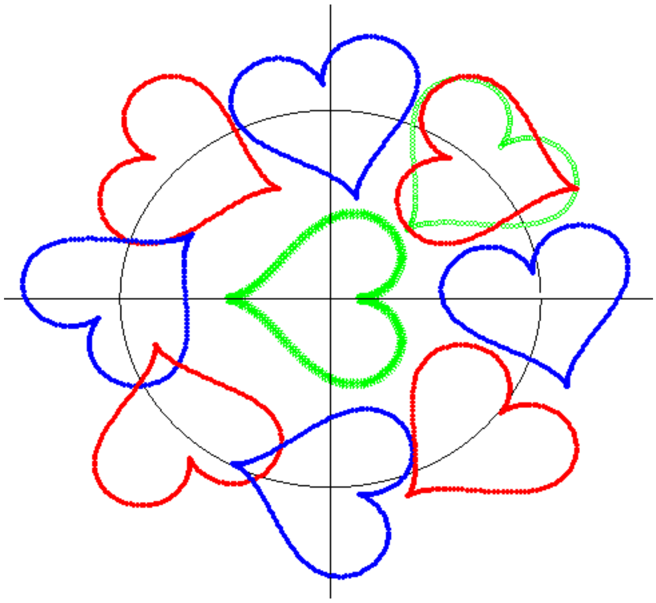
  $$B = A + C \cdot (cos(45°) + i \cdot \sin(45°)) \,.$$

  Saadud vektori B punktid kanname graafikule (graafikul on toodud kolm erinevat etappi: viimane asend, pööramine 60° ja nihutamine õigele orbiidile).

- Järgmine etapp: keerame 60° ja nihutades veel 45° kraadi vastupäeva. Graafikul on salvestatud ka eelmised südamed:



- Sarnaselt toimides teeme täisringi:



Analoogiliselt saab tasandil (kuid laiendatud tehetega ka ruumis) teisendada ükskõik millist tasandilist objekti, sealhulgas fotot. Viimaste korral peab muidugi kuskil olema salvestatud info värvide kohta. Korrutades pilti mingi muu kui ühikringi $|z| = 1$ elemendiga, saab pilti kokku suruda või välja venitada. Toome lisaks SciLab'is kasutatud koodi. Kellel huvi on, võib ise proovida järgi teha (valides näiteks mõne teise programmi).

```
clear
i = %i;                          // Tähistame imaginaarühiku ringi
M = 200;                         // Graafiku punktide arv
N = 8;                           // Keeramiste arv
A = zeros( M );                  // Punktide vektorid
B = zeros( M );                  // Punktide vektorid, abivektor

 for j = 1 : M
    fii = j*( 2*%pi/M );     // Arvu z argument
    // Defineerime südame punkti argumendiga fii, Re() ja Im() osa
    A( j ) = 13*cos( fii ) - 5*cos( 2*fii ) - 2*cos( 3*fii ) - ...
                   cos( 4*fii ) + i*( 16*sin( fii )**3 )
 end

 C = 25 + 25*i;  // Nihkevektor (SciLab kasutab seda kui vektorit)

 gcf(); scf(0); clf(0); // Graafikuga seotud käsud SciLab'is

 plot( real( A ) , imag( A ) , "g*") // Esialgne süda
```

```
  plot( 60*[ -1 , 1 ] , [ 0 , 0 ] , "k-" )  // Reaaltelg
  plot( [ 0 , 0 ] , 60*[ -1 , 1 ] , "k-" )  // Imaginaartelg
  plot( abs( C )*cos( [1:M]*( 2*%pi/M ) ) , ...
        abs( C )*sin( [1:M]*( 2*%pi/M ) ) , "k-" )  // Ringjoon |C|

for j = 0 : N

  varv = [ "r." , "b." ] // Värvide jaoks

   if j==0 then
            varv( 1 ) = "go";
            A = A .* (cos( %pi/4 )+i*sin(%pi/4))
// Keerame 45 kraadi
            B = A + C              // Nihutame vektori C võrra
        else
            varv( 1 ) = "r.";
            A = A .* (cos( %pi/3 )+i*sin(%pi/3))
                             // Pöörame viimases asendis südant
            B = A + C*exp( i*2*%pi*j/N )
                         // Nihutame südame õigele orbiidile
   end
  // Südame graafik
  plot( real( B ), imag( B ) , varv( modulo( j , 2 ) + 1 ), ...
            "MarkerSize" , 2 )
  sleep( 1000 )  // Paus
end
```

Viited

[1] D. R. Bellhouse. Abraham De Moivre: Setting the Stage for Classical Probability and Its Applications. CRC Press, 2011.

[2] A. P. Hillman, G. L. Alexanderson, M. E. Newton. Complex Numbers and Trigonometry (veebikonspekt), 2005.

[3] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross, 1997-98.

[4] M. Kline. Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, Volume 2. Oxford University Press, 1990.

[5] T. R. Kuphaldt. Lessons In Electric Circuits, Volume II - AC. 2007.

[6] C. A. Pickover. The Math Book. Sterling, New York, 2009.

[7] S. W. Smith. The Scientist and Engineer Guide to Digital Signal Processing. Newnes, 2002.

[8] V. Soomer. Kõrgem matemaatika (loengukonspekt).

[9] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.