

MTMM.00.188 Kõrgem matemaatika, 2. kontrolltöö teemad 2014

7.-12. praktikumi materjali peale. Loengutest eeldatakse siiski põhimõistete ja põhireeglite teadmist (omaduste rakendamist). Täpseid definitsioone, teoreemide sõnastusi ja teoreetilisi tõestusi ei küsita.

Allolevad näited ei illustreeri ülesannete lihtsust ega keerukust, vaid ülesannete põhitüpe.

NB! Taskuarvuti ja muude elektrooniliste abivahendite kasutamine ei ole kontrolltöö ajal lubatud.

Töösse ei tule kõiki ülesandeid korraga.

Töölehel on ära trükitud järgmised valemid:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du; \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}; \quad \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta; \quad \int_a^b F(x) dx; \quad \int_a^b |f(x) - g(x)| dx;$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt; \quad \frac{ax+b}{(x+c)(x+d)} = \frac{A}{x+c} + \frac{B}{x+d}; \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx; \quad \int_a^b v(t) dt; \quad \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

1.1 L'Hospital'i reegel

Praktikum 7, vt. ka 10. loengut.

1. Määramatused tüüpi $\frac{0}{0}$ ja $\pm\frac{\infty}{\infty}$.
2. Piirväärtus astmeeksponentfunktsioonidest $[f(x)]^{g(x)}$.

Näide. Leida l'Hospital'i reegli abil piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}.$$

Näide. Leida l'Hospital'i reegli abil piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{1/x}.$$

1.2 Määramata integraali leidmine

Praktikumid 8 ja 9, vt. ka 12. loengut. Samad võtted kehtivad ka määratud integraali leidmiseks.

1. Diferentsiaali märgi alla viimine.
2. Ette antud muutujavahetus.
3. Ositi integreerimine.
4. Ratsionaalsete polünoomide $\frac{P(x)}{Q(x)}$ integreerimine lihtsamal juhul.

Näide. Leida integraalid

$$\int \sin(2x) dx, \quad \int \sqrt{1+x} dx,$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx, \quad \int \sin(x) \cos^2(x) dx.$$

Näide. Leida integraal

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx,$$

tehes muutujavahetuse $x = t - 1$.

Näide. Integreeri ositi

$$\int \sin^2(2x) dx, \quad \int x^2 \sin(x) dx.$$

Näide. Leida integraalid

$$\int \frac{2x+1}{x(x+3)} dx, \quad \int \frac{1}{x^2(x+7)} dx.$$

1.3 Määratud integraali leidmine

Praktikum 10, vt. ka loengut 14.

1. Newton'i-Leibniz'i valem.
2. Muutujavahetus.
3. Absoluutväärtust sisaldavad avaldised.
4. Sümmeetrilised rajad (paaris- ja paaritud funktsioonid).
5. Integraali leidmine tuntud kujundi pindala kaudu (näiteks kolmnurk, ring).

Näide. Leida määratud integraal

$$\int_{-2}^5 e^{3-x} dx.$$

Näide. Leida määratud integraalid

$$\int_{-2}^3 |x^2 - 1| dx, \quad \int_{-1}^1 \sin^{19}(x) dx.$$

Näide. Leida määratud integraal

$$\int_{-2}^2 (|x| + \sqrt{4-x^2}) dx.$$

1.4 Määratud integraali rakendused

Praktikumid 10-12, vt. ka 15. loengut.

1. Kõvertrapetsi pindala.
2. Kõversektori pindala.
3. Joone kaare pikkus.
4. Töö arvutamine.
5. Funktsiooni keskmine väärtus.
6. Läbitud teepikkus ja nihe.
7. Pöördkeha ruumala.

Näide. Leida joontega $y = x^3$, $y=2$ ja $x = 0$ ($x \geq 0$) piiratud kujundi pindala. Teha joonis.

Näide. Leida kolmelehelise roosi pindala, $r = \sin(3\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Näide. Leida joone $x = 4(\cos(t) + t \sin(t))$, $y = 4(\sin(t) - t \cos(t))$, $t \in [0, \pi/2]$, kaare pikkus.

Näide. Mudalaviin teisaldab jõuga $F(x) = x^3 - \sin(x)$ jõehobu sirgjooneliselt punktist $x = 0$ punkti $x = 1$. Leida laviooni poolt tehtud töö.

Näide. Leida funktsiooni $y = 1 + \sqrt{x}$ keskmine väärtus lõigul $[0, 100]$.

Näide. Osake liigub kiirusega $v(t) = \sin(t - \pi)$. Leida osakese poolt läbitud teepikkus esimese 2π sekundi jooksul. Kui osake asub alghetkel nullpunktis, siis kus asub ta liikumise lõpuks?

Näide. Leida funktsiooni $y = e^x$ pöörlemisel ümber x -telje ($x \in [0, 2]$) tekkiva pöördkeha ruumala

1.5 Päratud integraalid

Praktikum 12, vt. ka loeng 16.

1. Lõpmatu rajaga integraalid.
2. Lõigus katkev funktsioon.

Näide. Leida päratud integraalid

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$