Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

21 Astmeread

Sisukord

Eksamiteemad

1. Astmerea mõiste.
2. Mis on astmerea koonduvusraadius ja koonduvuspiirkond ja kuidas neid leida.
3. Absoluutse koonduvuse piirkonna mõiste.
4. Astmeridade omadused.

21.1 Astmerea mõiste

Definitsioon 21.1

Astmereaks nimetatakse rida, mille liikmeteks on funktsioonid f_n, kus $f_n(x) = a_n\, x^n$, s.t. rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \dots \tag{21.1}$$

või üldisemalt rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x-c)^n = a_0 + a_1\, (x-c) + a_2\, (x-c)^2 + \dots . \tag{21.2}$$

21.2 Astmerea koonduvusraadius ja koonduvuspiirkond

Lause 21.1

Abel'i teoreem ([4, 5]). Kui astmerida (21.1) koondub punktis $x_0 \neq 0$, siis see rida koondub absoluutselt igas punktis x, kus $|x| < |x_0|$. Kui astmerida (21.1) hajub punktis $x_* \neq 0$, siis see rida hajub igas punktis x, kus $|x| > |x_*|$.

Tõestus. Tõestame koondumise osa. Kirjutame rea (21.1) kujul

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x_0 \frac{x}{x_0} + a_2\, x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + a_n\, x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \dots$$

ja vaatleme selle rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\; |x|^n = |a_0| + |a_1|\, |x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2|\, |x_0|^2 \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + |a_n|\, |x_0|^n \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots .$$

Kuna rida (21.1) koondub puntkis x_0, siis arvrea koondumise tarviliku tingimuse tõttu kehtib

$$\lim_{n\to\infty} a_n\, x_0^n = 0.$$

Viimane ütleb meile seda, et jada $(a_n\, x_0^n)$ on tõkestatud (kuna iga koonduv jada on tõkestatud). Seega leidub konstant $M > 0$, nii et kehtib võrratus

$$|a_n|\, |x_0|^n < M \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots .$$

Seega saame absoluutväärtustest moodustatud rida hinnata kui

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\; |x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |x_0|^n \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n .$$

Kuna x on valitud nii, et $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, siis rida

$$M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

koondub kui geomeetriline rida kordajaga $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Positiivsete ridade võrdluslause põhjal koondub ka esialgne rida $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |x|^n$ ja kokkuvõtteks koondub meie esialgne rida absoluutselt.

Vaatleme nüüd lause teist osa, hajumise väidet. Kui rida hajuks punktis x_*, aga koonduks punktis x, kus $|x| > |x_*|$, saaksime vastuolu lause esimese osaga, mille põhjal koonduvusest punktis x järelduks koonduvus punktis x_*. Järelikult peab rida hajuma punktis x, kus $|x| > |x_*|$.

$\square$

Definitsioon 21.2

Astmerea (21.1) koonduvuspiirkond X ja absoluutse koonduvuse piirkond A defineeritakse järgnevalt:

$$X = \left\{ x_0 \ : \ \text{arvrida} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_0^n \ \text{koondub} \right\} \tag{21.3}$$

ja

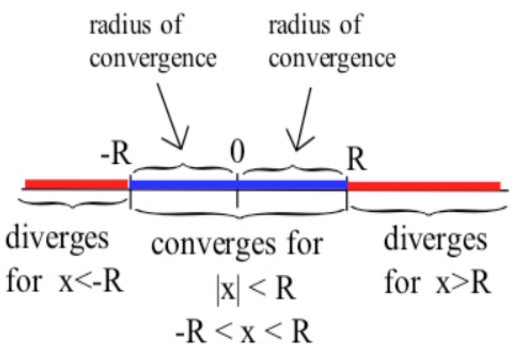
$$A = \left\{ x_0 \ : \ \text{arvrida} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_0^n \ \text{koondub absoluutselt} \right\}. \tag{21.4}$$

Märkus 21.1

Astmerea (21.1) koonduvuspiirkond on järgmise struktuuriga: leidub arv $R \geq 0$, nii et astmerida (21.1) koondub absoluutselt vahemikus $(-R, R)$ ning hajub väljaspool seda vahemikku. Punktides $x = -R$ ja $x = R$ tuleb koonduvust eraldi uurida, s.t. uurime arvridade

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (-R)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, R^n,$$

koonduvust.



Allikas: [2]

Definitsioon 21.3

Arvu R nimetatakse astmerea koonduvusraadiuseks, vahemikku $(-R, R)$ astmerea (21.1) koonduvusvahemikuks.

Lause 21.2

Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ või $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ siis koonduvusraadiust R saab leida vastavalt järgmiste valemite abil:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{või} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{21.5}$$

või siis lähtudes d'Alembert'i ning Cauchy tunnustest,

$$\frac{1}{R} = D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{või} \quad \frac{1}{R} = C = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}. \tag{21.6}$$

Tõestus. Kasutame rea koonduvuse uurimiseks näiteks d'Alembert'i tunnust,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot D.$$

D'Alembert'i tunnuse järgi rida koondub absoluutselt, kui

$$|x|\cdot D < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |x| < \frac{1}{D} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Rida hajub, kui $|x|\cdot D > 1$. Analoogiliselt saab näidata tulemust Cauchy tunnuse kohta. □

Näide 21.1 Leiame astmerea

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

koonduvuspiirkonna X ja absoluutse koonduvuse piirkonna A. Siin

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Valemi (21.5) põhjal saame

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1.$$

Seega vaadeldav rida koondub absoluutselt vahemikus $(-1,1)$. Kui $x = -1$, siis saame arvrea

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},$$

mis hajub (üldistatud harmooniline rida astmega $\alpha = \frac{1}{2} < 1$). Siit on ka näha, et rida ei koondu absoluutselt punktides $x = -1$ ja $x = 1$. Kui $x = 1$, siis saame arvrea

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}},$$

mis koondub Leibniz'i tunnuse põhjal. Saime, et

$$X = (-1,1], \quad A = (-1,1).$$

◇ ◇ ◇

Näide 21.2 Leiame astmerea

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\,x^n$$

koonduvuspiirkonna X ja absoluutse koonduvuse piirkonna A.
Siin

$$a_n = (n+1)!.$$

Valemi (21.5) põhjal saame

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{(n+2)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0.$$

Seega

$$X = A = \{0\}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 21.3 Leiame astmerea

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}\,x^n$$

koonduvuspiirkonna X ja absoluutse koonduvuse piirkonna A.
Siin

$$a_n = \frac{1}{n^n}.$$

Valemi (21.5) põhjal saame

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

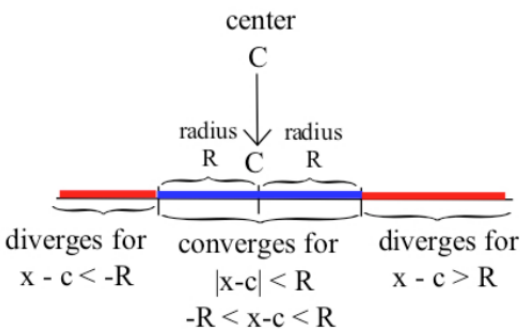
Seega

$$X = A = (-\infty, \infty).$$

◇ ◇ ◇

Märkus 21.2

Tehes muutujavahetuse $t = x - c$, on lihtne veenduda, et astmerea (21.2) koonduvusvahemik on $(c - R, c + R)$.



Allikas: [2]

Näide 21.4 Leiame astmerea

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$$

koonduvuspiirkonna X ja absoluutse koonduvuse piirkonna A.

Siin

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Selle astmerea kordajad a_n on samad, mis paar näidet tagasi. Siin $c = 5$, $R = 1$ ning

$$X = (5-1, 5+1] = (-4, 6], \quad A = (5-1, 5+1) = (4, 6).$$

◇ ◇ ◇

21.3 Astmerea omadused

Teame, et kui funktsioonid $f_1, f_2, \ldots, f_n$ on pidevad (diferentseeruvad) piirkonnas X või integreeruvad lõigus $[a, b] \subset X$, siis samad omadused on funktsioonil

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Need väited ei pruugi kehtida, kui vaatleme funktsionaalrea (lõpmatu rea) summat

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Osutub (vt. [4]), et astmereal on eelnimetatud omadused. Esitame need tõestuseta.

Lause 21.3

Astmerea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x^k$ summa $S = S(x)$ on koonduvusvahemikus $(-R, R)$ pidev funktsioon, s.t. igas punktis $x_0 \in (-R, R)$ kehtib

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x_0^k.$$

Lause 21.4

Astmerida $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x^k$ võib igas punktis $x \in (-R, R)$ liikmeti diferentseerida, s.t.

$$S'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1}.$$

Lause 21.5

Astmerida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\, x^k$ võib igas lõigus $[a,b] \subset (-R,R)$ liikmeti integreerida, s.t.

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x^k\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b a_k\, x^k\, dx.$$

21.4 Funktsioonide arendamine astmereaks

Definitsioon 21.4

Kui iga $x \in X = (c-R, c+R)$ korral

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-c)^n, \tag{21.7}$$

s.t. funktsioon f on vaadeldava astmerea summa, siis öeldakse, et funktsioon f on vahemikus X arendatud astmereaks. Sel juhul astmerea kordajad a_n avalduvad valemitega

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21.8}$$

kusjuures $0! = 1$ ja $f^{(0)}(c) = f(c)$.

Ajalooliselt on kujunenud, et tuntuks on saanud Taylor'i ja Maclaurin'i nimed. Tegelikult tegeles šoti matemaatik ja astronoom James Gregory (1638 - 1675) selliste ridadega juba kümneid aastaid varem, kui Taylor ja Maclaurin. Gregory võttis oma tulemused kokku 1667. aastal ilmunud raamatus "Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura". Taylor esitas oma tulemused hiljem (1715) sõltumatult Gregory tööst ja Maclaurin viitas omakorda Taylor'i raamatule.

James Gregory. Allikas: Wikipedia

Definitsioon 21.5

Rida (21.7), mille kordajad a_n on antud valemitega (21.8), nimetatakse funktsiooni f Taylor'i reaks, erijuhul $c = 0$ korral Maclaurin'i reaks.

Märkus 21.3

Olgu α_n Taylor'i valemi jääkliige Lagrange'i kujul, s.t.

$$\alpha_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-c)^{n+1}, \quad \xi \in (c,x). \tag{21.9}$$

Valem (21.7) kehtib parajasti siis, kui

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{21.10}$$

Näide 21.5 Kui $f(x) = e^x$, siis $f^{(n)}(x) = e^x$ ja $f^{(n)}(0) = 1$ iga $n = 0, 1, 2, \ldots$ korral. Osutub, et tingimus

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

on täidetud iga $x \in (-\infty, \infty)$ korral ja seetõttu funktsiooni $f(x) = e^x$

Maclaurin'i rida on järgmisel kujul:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

◇ ◇ ◇

21.5 Tähtsamate elementaarfunktsioonide Maclaurin'i read

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{21.11}$$

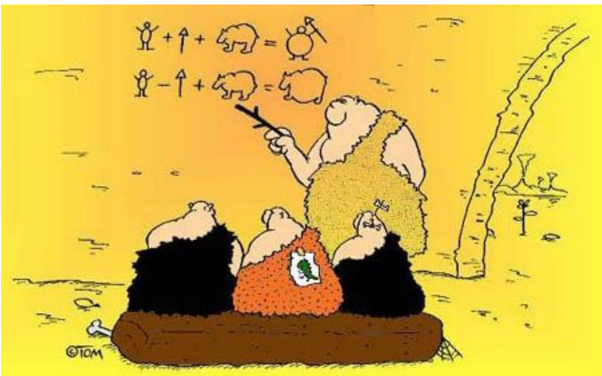
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{21.12}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{21.13}$$

$$\begin{aligned}(x+1)^m \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} C_m^n x^n = 1 + m\,x + \frac{m\,(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m\,(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n \\ &+ \ldots, \quad x \in (-1, 1),\end{aligned} \tag{21.14}$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad x \in (-1, 1], \tag{21.15}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1, 1]. \tag{21.16}$$



Allikas: Internet

21.6 Integreerimine astmeridade abil *

Näide 21.6 Leiame integraali

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx, \quad a>0.$$

Funktsiooni e^{-x^2} algfunktsioon ei ole elementaarfunktsioon. Integraali arvutamiseks arendame integraalialuse funktsiooni reaks, asendades e^x arendis x suurusega $-x^2$:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots.$$

Siit saame

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{-x^2}\,dx &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\\ &= a - \tfrac{a^3}{3} + \tfrac{a^5}{10} - \ldots (-1)^n\tfrac{a^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} + \ldots.\end{aligned}$$

Selle võrduse abil saab integraali arvutada mistahes täpsusega iga $a>0$ korral.

◇ ◇ ◇

Näide 21.7

Leiame integraali

$$\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\,dx, \quad a>0.$$

Funktsiooni $\frac{\sin(x)}{x}$ algfunktsioon ei ole elementaarfunktsioon. Integraali arvutamiseks arendame integraalialuse funktsiooni reaks:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x} &= \tfrac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\\ &= 1 - \tfrac{x^2}{3!} + \tfrac{x^4}{5!} - \tfrac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^n\tfrac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots.\end{aligned}$$

Viimane rida koondub kõigi $x\in(-\infty,\infty)$ väärtuste korral. Siit saame

$$\begin{aligned}\int_0^a \tfrac{\sin(x)}{x}\,dx &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}\\ &= a - \tfrac{a^3}{3!\,3} + \tfrac{a^5}{5!\,5} - \ldots (-1)^n\tfrac{a^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} + \ldots.\end{aligned}$$

Selle võrduse abil saab integraali arvutada mistahes täpsusega iga $a>0$ korral.

◇ ◇ ◇

Näide 21.8 Leiame integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^7}\,dx.$$

Integraalialune funktsioon ei tundu just keeruline, aga algfunktsiooni leidmine ei ole sugugi lihtne. Üks võimalus on astmeritta arendamine. Kui $|x| < 1$, siis geomeetriline rida koondub

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Seega võttes $q = -x^7$, saame

$$\frac{1}{1+x^7} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}.$$

Viimane rida koondub absoluutselt iga $x \in (-1, 1)$ korral. Integreerime

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^7}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{7n+1}.$$

Märgime, et punktis $x = 1$ tegelikult meie rittaarendus ei tööta (kuna $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ hajub), aga antud juhul integraali väärtus tuleb punktis $x = 1$ lõplik (rida $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{7n+1}$ koondub Leibniz'i tunnuse põhjal).

◇ ◇ ◇

Näide 21.9 Kuigi funktsioone saab astmeritta arendada, kasutades kordajate a_n leidmiseks tuletise võtmist $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, siis see võib osutuda väga töömahukaks ettevõtmiseks. Mõnikord saab ära kasutada juba teada olevat infot. Näiteks, arendame astmeritta funktsiooni $y = \ln(1 - x)$. Paneme tähele, et

$$-\int \frac{1}{1-x}\,dx = \ln(1-x) + C.$$

Kui $|x| < 1$, siis geomeetrilisest reast saame

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Seega

$$\ln(1-x) + C = -\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

ja

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [-1, 1).$$

◇ ◇ ◇

21.7 Diferentsiaalvõrrandite lahendamine *

Kui diferentsiaalvõrrandit ei lahendata numbriliste vahenditega, siis tihti on abiks astmeritta arendamise meetod.

Näide 21.10 Leiame teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$y''(x) = 2x \cdot y'(x) + 4y(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

lahendi. Selleks esitame tundmatu lahendi y astmereana

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n = a_0 + a_1 \, x + a_2 \, x^2 + \dots .$$

Algtingimustest saame, et

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0, \; a_1 = 1.$$

Teiste kordajate $a_2, a_3, a_4, \dots$ leidmiseks asetame ritta arendatud lahendi y algvõrrandisse:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \right)'' = 2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \right)' + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$$

ehk

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \, (n-1) \, a_n \, x^{n-2} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} n \, a_n \, x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n .$$

Viimast saab kirjutada kujul

$$2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \, (k+1) \, a_{k+2} \, x^k = \sum_{k=1}^{\infty} 2k \, a_k \, x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 4a_k \, x^k + a_0 .$$

Kui $x = 0$, siis siit tuleb, et $2a_2 = a_0$. Kogudes kokku x-astmete kordajad, saame

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1) \, (k+2) \, a_{k+2} - (2k+4) \, a_k \right] \, x^k = a_0 - 2a_2 = 0.$$

Kuna antud võrdus peab kehtima iga x korral, siis peavad kehtima võrrandid

$$(k+1) \, (k+2) \, a_{k+2} - (2k+4) \, a_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Avaldame siit a_{k+2}:

$$a_{k+2} = \frac{(2k+4) \, a_k}{(k+1) \, (k+2)} = \frac{2 \, a_k}{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Arvestades, et $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0$, leiame

$$a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = a_{2k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$a_3 = \frac{2 \, a_1}{2} = a_1 = 1 = \frac{1}{1!},$$

$$a_5 = \frac{2 \, a_3}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!},$$

$$a_7 = \frac{2\,a_5}{6} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{3!},$$
$$a_{2k+1} = \frac{2\,a_{2k-1}}{2k} = \frac{1}{k\,(k-1)!} = \frac{1}{k!}.$$

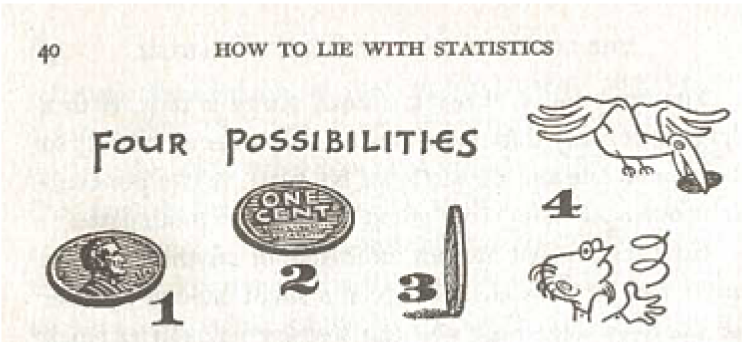
Kokkuvõtteks oleme saanud

$$y(x) = x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \dots.$$

Siin on võimalik x sulgude ette tuua ja märgata, et järgi jääb funktsiooni e^{x^2} Maclaurin'i rida:

$$y(x) = x\left(1 + (x^2)^1 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \dots + \frac{(x^2)^k}{k!} + \dots\right) = x\,e^{x^2}.$$

$\diamond \diamond \diamond$



Allikas: Internet

Viited

[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[3] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.

[4] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[5] N. Piskunov. Diferentsiaal- ja integraalarvutus. 2. köide. Tallinn Valgus, 1983.

[6] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.