Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

22 Fourier' read

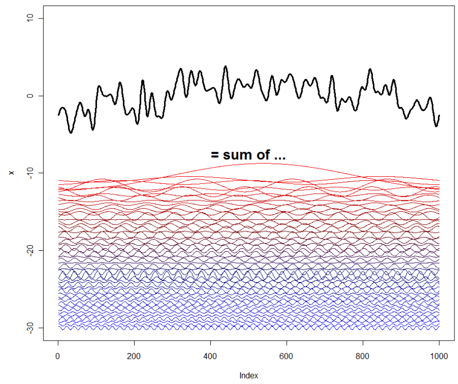
Sisukord

Eksamiteemad

1. Trigonomeetrilise rea mõiste.
2. Mida tähendab, et komponentlaine võnkumine on suure või väikese sagedusega ja milline on amplituud.
3. Oskama lihtsamal juhul leida funktsiooni $y = f(x)$ Fourier' rida, kui Fourier' rea kordajate valemid on ette antud.

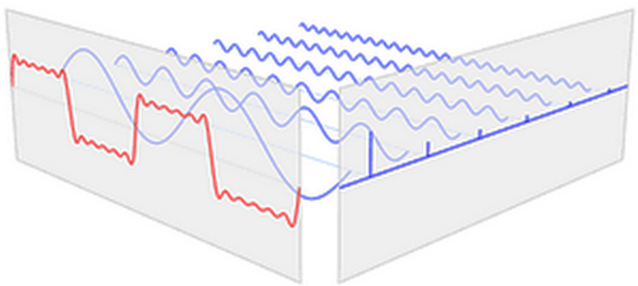
22.1 Sissejuhatus

Kui te kõnelete näiteks mobiiltelefoniga, siis saab teie kõne salvestada kui helisignaali, mis tegelikult sisaldab komponentidena teie kõnet, taustamüra, elektroonilist müra ja ilmselt veel midagi. Kõrval oleval pildil võiks siis ülemine joon tähistada kõne kulgemist ajas ja alumised jooned tähistavad erineva sagedusega ja tugevusega helilaineid (nn. baaslaineid).



Graafiku koodi autor: Rasmus E. Benestad

Fourier' ridade teooria lubabki leida ette antud signaalist need üksikud komponendid, s.t. annab ette matemaatilise aparatuuri komponentide leidmiseks. Eraldades välja üksikud lained, saab telefonis olev programm eemaldada ebavajaliku (liigse müra, liiga kõrged ja liiga madalad sagedused) ja vastavalt vajadusele mingit sagedust võimendada või kärpida.



Allikas: Wikipedia

Sedasi on võimalik kõne salvestamisel kasutada ka vähem mälu, kõne edastamisel vähem andmemahtu ja ühendus ning kõnetöötlus võib toimuda oluliselt kiiremini. Telefoni programm teisendab töödeldud signaali digitaalseks ja saadab tekkiva bitijada teele vastuvõtja suunas. Vastuvõtjas olev programm teisendab bitijada tagasi arvudeks, mille abil luuakse vastava sagedusega (matemaatilised) lained ja nendest komponentidest luuakse lõpuks vastav helilaine, mida kuuleb teie vestluspartner.

Selliselt saab rohkemal või vähemal määral töödelda ja analüüsida, kuid ka pakkida mistahes signaale, mis sisaldavad mingeid mustreid, valguslainet (valgusspektrit). Kasutusvaldkonda kuulub ka foto- ja videotöötlus, ainete koostise uurimine jne.

Meie kaks viimast loengut tutvustavad Fourier' ridu, tänu millele kirjeldatud sündmused aset leiavad. Praktikas on kogu protsess detailides muidugi oluliselt keerulisem, aga alustame siis sellest kõige lihtsamast.

22.2 Veidi ajaloost

Prantsuse füüsik ja matemaatik Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) võttis 1807. aastal osa Prantsuse Teaduste Akadeemia konkursist, esitades töö soojuse levimise kohta. See lükati tagasi, kuid õnneks ei kaotanud Fourier teema vastu huvi. Akadeemial oli kombeks esitada konkursi teemadeks aktuaalseid probleeme ja 1812. aasta konkursi teemaks kuulutati välja just soojuse levimine. Fourier kandideeris taas ja võitis selle konkursi. Tema uuritud soojuse juhtivuse võrrand oli kujul

Joseph Fourier. Allikas: Wikipedia

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

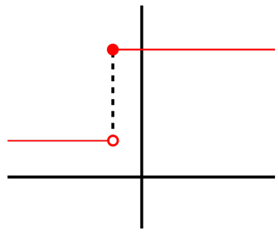
kus $u(x,t)$ on temperatuur lõpmata peenikese metallvarda punktis x ajahetkel t, α on soojusjuhtivuse parameeter. Fourier' lahenduse põhimõte oli järgmine. Olgu alghetkel soojus jaotunud näiteks siinusfunktsiooni kujul,

$$u(x,0) = \sin(x) + \sin(5x).$$

Siis saab näidata, et soojusjuhtivuse võrrandi lahend on

$$u(x,t) = e^{-\alpha t}\sin(x) + e^{-25\alpha t}\sin(5x).$$

Veelgi enam, võttes algolekus siinusfunktsioone juurde, vastavate „kaaludega“, siis lahend omab analoogiliselt kuju, mis koosneb nende siinusfunktsioonide summast, iga siinusfunktsioon on läbi korrutatud vastava eksponentfunktsiooni ja kaaluga.



Katkev funktsioon. Allikas: Wikipedia

Oluliseks osutus probleem, kus lahend $u(x,t)$ ei ole alghetkel mitte siinusfunktsiooni kujuga, vaid omab esimese poole toru peal ühte konstantset temperatuuri ja teise poole toru peal mingit teist temperatuuri.

Tekkis küsimus, kas ja kuidas on võimalik katkevat funktsiooni esitada siinusfunktsioonide summana. Lõpliku summa korral ei ole see kindlasti võimalik, aga kuidas on lood lõpmatu summa korral? Fourier' võitis küll 1812. konkursi auhinna, kuid see töö sai nii palju kriitikat, et Akadeemia keeldus tööd avaldamast (rahaliselt toetamast). Üheks kriitika põhjuseks oli vana haav rivaalide Euler'i ja Bernoull'i näol, kes uurisid analoogist lahenduskäiku võnkuva keele korral. Võnkuva keele jaoks katkeva funktsiooni probleemi ette ei tulnud, kuna katkev keel ei võngu. Soojuse korral saab aga sellise ülesande püstitada ja Fourier seisis silmitsi seni uurimata probleemidega. Üheks segaduse põhjuseks oli ka funktsiooni ja integraali range mõiste puudumine. Viimane tingis selle, et esitati lahendusi, mis igas olukorras ei töötanud.

Hiljem, 1822. aastal, avaldas Fourier tehtud töö raamatuna „Theorie analytique de la chaleur“, mis sisaldas soojuse levimise kõrval väidet, et **iga** pideva ja samas ka mittepideva funktsiooni saab esitada rea abil, mis sisaldab ainult siinusfunktsioone. Väide oli ilmselgelt vale, aga sellest hoolimata sai süüdatud tuluke katkevate funktsioonide kirjeldamiseks ridade abil. Õigus oli nii Fourier'l (idee töötab tänini ja just nimelt praktikas, kus funktsioonid f on tavaliselt lihtsad ning katkevust ei pea käsitlema liiga jäigalt) kui ka tema konkurentidel (Fourier' väited ei pea paika suvalise katkeva funktsiooni jaoks) ning tänaseks päevaks on paljud teoreetilised takistused kõrvaldatud. Fourier' ridade teooria on võimaldanud kaasaja elektroonika maailmas välja töötada suurel hulgal kasulikke rakendusi, alates helilainetest lõpetades video- ja pilditöötlusega. Järgnevalt vaatleme veidi lähemalt, kuidas seda kõike tehakse.

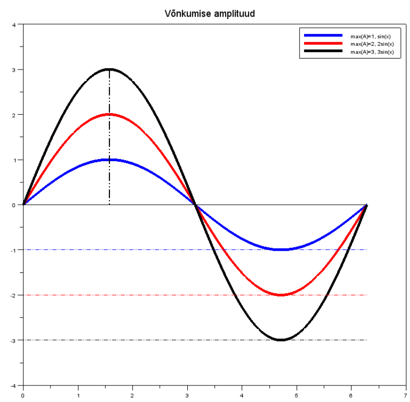
22.3 Siinuslaine

Pidevat võnkumist saab matemaatikas kirjeldada siinsulaine abil:

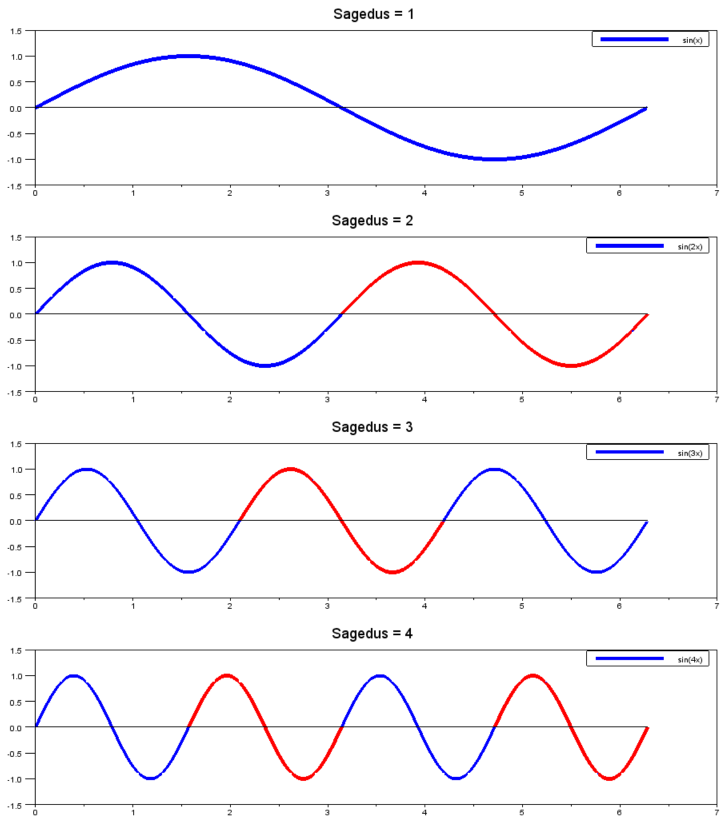
$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \tag{22.1}$$

kus A on võnkumise amplituud, ω on võnkumise nurksagedus ($\omega = 2\pi f$, kus f on võnkumiste arv sekundis) ja φ on võnkumise faasinihe.

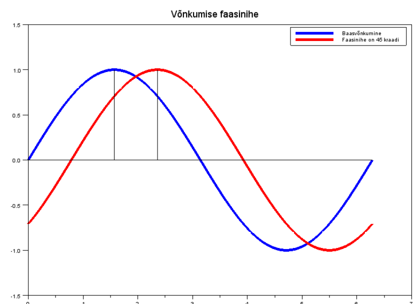
Laine amplituud näitab laine maksimaalset kaugust tasakaaluasendist teatud hetkel. Amplituudi kaudu saab kirjeldada võnkumise intensiivsust (nt. helitugevust).



Sagedus näitab võnkumiste arvu ühes ajaühikus. Joonisel on esitatud perioodis 2π ühikamplituudiga siinuslained $\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)$ ja $\sin(4x)$. Neist kõige madalama ja kõige kõrgema sagedusega on vastavalt $\sin(x)$ ja $\sin(4x)$.

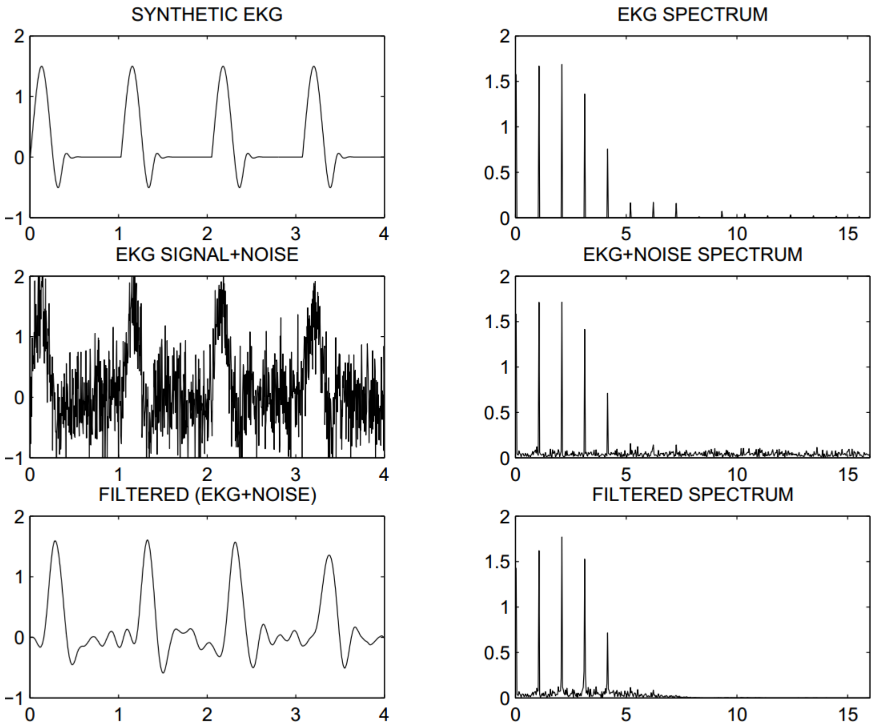


Võnkumise faasinihe tähendab signaali hilinemist või ennetamist.



22.4 Signaali töötlemine

Vaatleme südame EKG-signaali. Esimesel real on pilt, milline peaks teoreetiliselt tegelik signaal välja nägema. Teisel real on mõõdetud signaal koos müraga (taustamüra, igasugu segavad võnkumised, mõõteriista ebatäpsus jne). Kolmandal real on digitaalselt töödeldud (puhastatud) signaal, kus mürasest signaalist on eemaldatud 25 hertsist kõrgemad sagedused. Madalama sagedusega laineid saaksime samuti eemaldada (või siis muuta), aga siis mõjutaks see juba ka oluliselt lõppsignaali.



Allikas: [6]

Paremas veerus on toodud üksikute komponentlainete sageduste ja amplituudide graafikud (vasakul olev signaal koosneb sellistest lainetest). Igale vastavale sagedusele on kuvatud tulp, mille kõrgus on vastavat sagedust omava laine amplituud.

22.5 Trigonomeetrilised read

Definitsioon 22.1

Olgu (a_n) ja (b_n) arvjadad. Funktsionaalrida

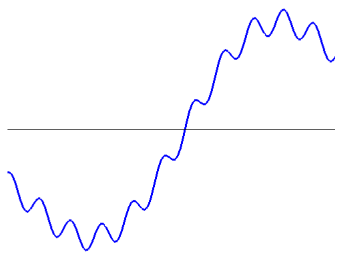
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big) \tag{22.2}$$

nimetatakse trigonomeetriliseks reaks.

Kui rida (22.2) koondub, siis tema summa on perioodiline funktsioon perioodiga 2π, s.t. $f(x) = f(x + 2\pi)$.

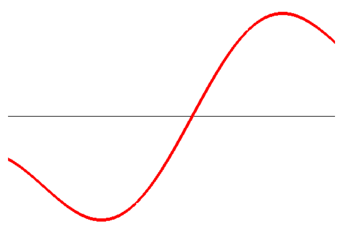
Vaatleme näidet lihtsamal juhul. Olgu mõõdetud laine selline, mis koosneb kolmest erineva sagedusega siinuslainest

$$2\sin(t) + \sin(5t) + \frac{1}{5}\sin(50t).$$



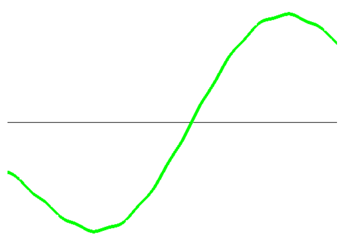
Antud juhul on kõrge sagedusega komponendiks $\frac{1}{5}\sin(50t)$. Jättes viimase ära, saame palju siledama (ja ka selgema laine)

$$2\sin(t) + \sin(5t).$$



Kui me ei soovi, et kõrge sagedusega info täielikult kaoks, võime vähendada vastava laine amplituudi (näiteks vähendame 10 korda),

$$2\sin(t) + \sin(5t) + \frac{1}{50}\sin(50t).$$



22.6 Fourier' read

Olgu järgnevalt funktsioon f määratud kas lõigus $[-\pi, \pi]$, vahemikus $(-\pi, \pi)$ või olgu ta (2π)-perioodiline vahemikus $(-\infty, \infty)$.

Definitsioon 22.2

Kui kordajad a_n ja b_n on määratud valemitega

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \tag{22.3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(nx)\, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin(nx)\, dx, \end{aligned} \tag{22.4}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, siis trigonomeetrilist rida (22.2) nimetatakse funktsiooni f Fourier' reaks.

Kordajaid a_n, b_n nimetatakse funktsiooni f Fourier' kordajateks. Kirjutame

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big). \tag{22.5}$$

Tuletame toodud kordajate valemid, eeldades hetkeks võrduse kehtimist

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big), \tag{22.6}$$

kus kordajad a_0 ja $a_1, a_2, \ldots$ ning $b_1, b_2, \ldots$ on tundmatud reaalarvud. Lisaks eeldame järgnevalt, et lõpmatu summa ja integraali leidmise järjekorda võib muuta (viimane kehtib tegelikult ainult teatud tingimustel, kuid valemite kirjapildi tuletamiseks piisab ka vähemast).

Integreerime võrduse (22.6) mõlemat poolt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)\, dx.$$

Integreerime kõiki liikmeid eraldi. Esiteks

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx = \pi\, a_0.$$

Teiseks,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) \Big)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin(nx) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0.$$

Kolmandaks,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(b_n \sin(nx) \Big)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos(nx) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0,$$

kuna $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi)$. Saime, et

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Järgnevalt leiame kordajad $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Selleks fikseerime $n \in \mathbb{N}$ ja korrutame võrdust (22.6) läbi funktsiooniga $\cos(nx)$:

$$f(x)\cos(nx) = \frac{a_0}{2} \cos(nx) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx)\cos(nx) + b_k \sin(kx)\cos(nx) \Big).$$

Saadud võrduse mõlemaid pooli integreerime rajades $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{a_0}{2} \cos(nx)\, dx \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx)\cos(nx) + b_k \sin(kx)\cos(nx) \Big)\, dx. \end{aligned}$$

Esimesena saame, et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(nx)\, dx = \frac{a_0}{2n} \sin(nx) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0.$$

Märgime, et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\, dx = 0,$$

kuna integraalimärgi all on paaritu- ja paarisfunktsiooni korrutis, mis annab paaritufunktsiooni (viimane on sümmeetriliste rajade korral võrdne nulliga).

Kui $k \neq n$, siis võib leida, et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((k+n)x)\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((k-n)x)\, dx = 0.$$

Kogu lõpmatust summast on nullist erinev vaid liige

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx)\cos(nx)\, dx = 2a_n \int_{0}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx = a_n \int_{0}^{\pi} (1+\cos(2nx))\, dx = \pi\, a_n.$$

Saime, et

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(nx) dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Analoogiliselt võib leida kordajad $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

22.7 Fourier' rea koondumine

Definitsioon 22.3

Funktsiooni f nimetatakse siledaks vahemikus (a, b), kui ta on selles vahemikus pidevalt diferentseeruv, s.t. funktsioon on diferentseeruv ja tema tuletis on pidev funktsioon.

Definitsioon 22.4

Funktsiooni f nimetatakse tükiti siledaks vahemikus (a, b), kui seda vahemikku on võimalik jagada **lõplikuks** arvuks osavahemikeks punktidega

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b, \quad n \in \mathbb{N},$$

nii et igas osavahemikus on funktsioon f sile, kusjuures funktsioonidel f ja f' eksisteerivad oma katkevuspunktides lõplikud ühepoolsed piirväärtused.

Märkus 22.1

Sileda funktsiooni graafik on sile joon, tükiti sileda funktsiooni graafik koosneb **lõplikust** arvust siledatest osadest.

Teoreem 22.1

Dirichlet' teoreem ([2, 3]). Kui funktsioon f on tükiti sile vahemikus $(-\pi, \pi)$, siis selle funktsiooni Fourier' rida koondub summaks $S = S(x)$,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big), \tag{22.7}$$

kusjuures

1. $S(x) = f(x)$ funktsiooni f pidevuspunktides;
2. $S(x) = \frac{1}{2} \left[f(x-) + f(x+) \right]$ funktsiooni f katkevuspunktides;
3. $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2} \left[f(-\pi+) + f(\pi-) \right]$.

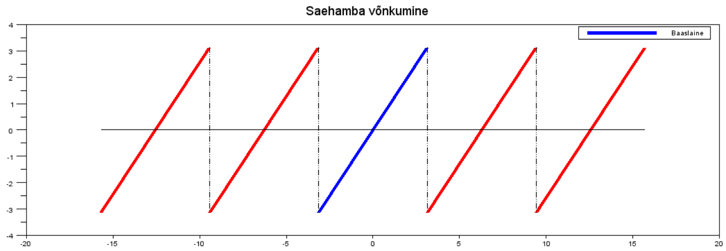
Dirichlet' teoreemist järeldub, et Fourier' ridadega esitatavate funktsioonide klass on üsna lai. Näiteks astmeridade klass nii lai ei ole, kuna astmeridade korral peaks funktsioon olema lõpmatu arv kordi diferentseeruv (et arvutada kordajaid $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$) ja seegi pole alati piisav tingimus astmerea leidumiseks.

Seetõttu rakendatakse just Fourier' ridu matemaatika ja füüsika mitmesugustes osades sageli. Füüsikas esineb tihti perioodilisi võnkumisi ja signaale. Kuna trigonomeetriline rida on perioodiline, siis sobib see suurepäraselt selliste võnkumiste matemaatiliseks kirjeldamiseks ja uurimiseks.

22.8 Näide 1. Saehamba laine

Vaatleme (2π)-perioodilist saehamba lainet, mida kasutatakse näiteks muusikas süntesaatorites. Selle laine võrrandiks piirkonnas $-\pi < x \leq \pi$ on

$$f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi]. \tag{22.8}$$



Leiame antud funktsiooni Fourier' rea. Esiteks

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0.$$

Viimane ütleb, et konstantset lainet rida ei sisalda. Järgnevalt leiame $n = 1, 2, 3, \dots$ jaoks, et

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(nx)\,dx = 0,$$

kuna meil on sümmeetrilised rajad, koosinus on paaris- ja $f(x) = x$ paaritufunktsioon. Kokku on integraalimärgi all paaritu funktsioon, mille väärtus sümmeetriliste rajade korral on null. Edasi $(n = 1, 2, 3, \dots)$,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cdot \sin(nx)\,dx.$$

Viimast saab leida ositi, $u = x$, $dv = \sin(nx)\,dx$ ja $v = -\frac{1}{n}\cos(nx)$:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n} \int_{0}^{\pi} \cos(nx)\,dx \right]_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{2}{\pi} \frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi) \Big|_{x=0}^{x=\pi}.$$

Paneme tähele, et $\sin(n\pi) = 0$ ja $\cos(n\pi) = (-1)^n$, seega

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Oleme saanud rea

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n} = 2 \left[\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \dots \right]. \tag{22.9}$$

Viimasel juhul f ja Fourier' rea vahel kehtib võrdus kõikide x korral välja arvatud katkevuspunktides $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Katkevuspunktides koondub Fourier' rida Dirichlet' teoreemi järgi funktsiooni parempoolse ja vasakpoolse piirväärtuse aritmeetiliseks keskmiseks:

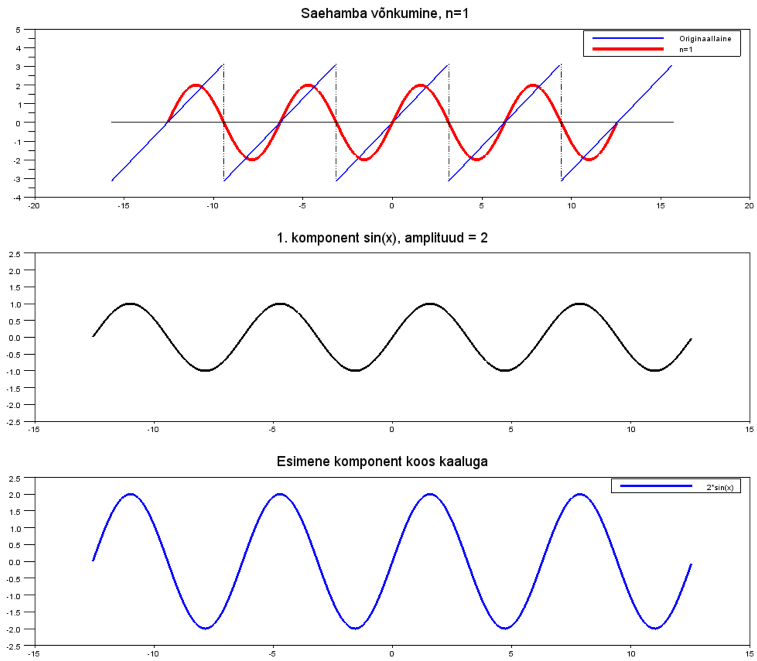
$$S(x) = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0, \quad x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Järgenvalt vaatleme leitud komponente

$$b_n \sin(nx) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

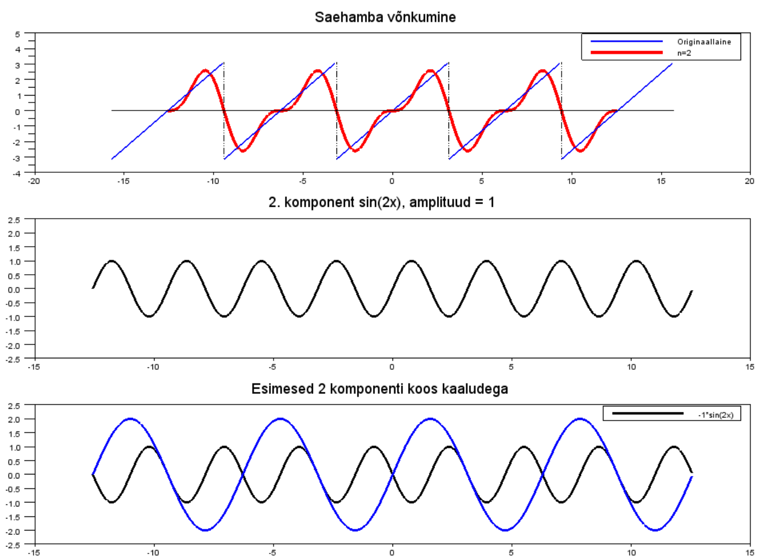
Kui $n = 1$, siis Fourier' rea osasumma S_n avaldub valemiga

$$S_1(x) = 2\,\sin(x).$$



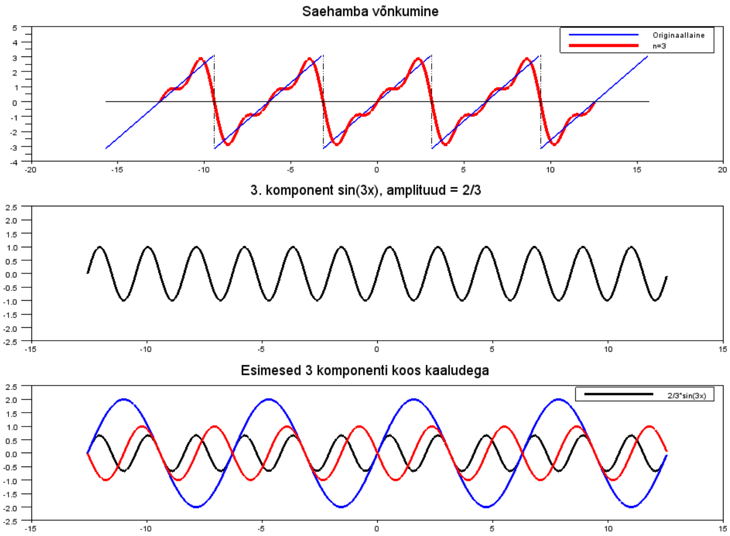
Kui $n = 2$, siis

$$S_2(x) = 2\,\sin(x) - \sin(2x).$$



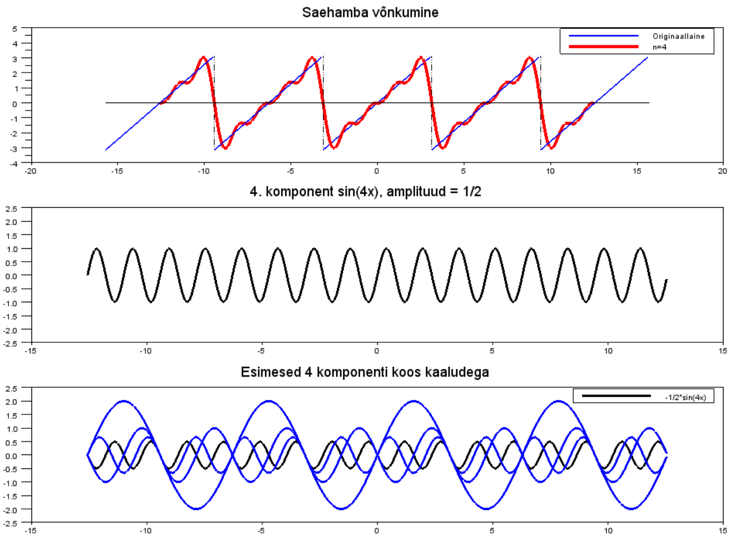
Kui $n = 3$, siis

$$S_3(x) = 2\,\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x).$$

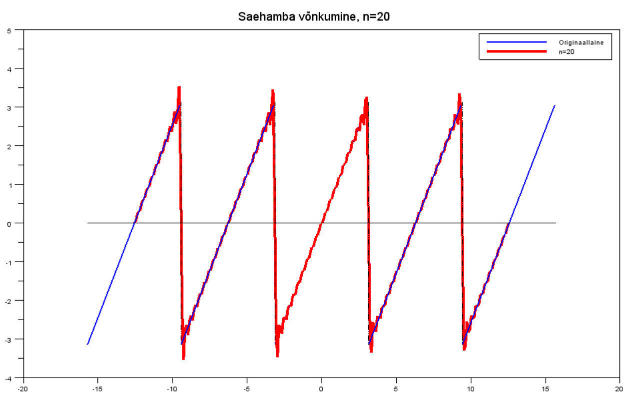


Kui $n = 4$, siis

$$S_4(x) = 2\,\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(4x).$$



Esimese 20 liikme korral saame järgmise tulemuse.



22.9 Fourier' rida funktsiooni korral perioodiga 2L

Olgu funktsioon f perioodiga $2L$. Teeme muutujavahetuse

$$x = \frac{L}{\pi}\, t.$$

Funktsioon f on nüüd perioodiline funktsioon perioodiga 2π,

$$f(x) = f(x+2L) \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{L}{\pi}\, t\right) = f\left(\frac{L}{\pi}\, t + 2L\right) = f\left(\frac{L}{\pi}[t+2\pi]\right).$$

Sel juhul funktsiooni f Fourier' rida avaldub kujul

$$f\left(\frac{L}{\pi}\, t\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(n\,t) + b_n \sin(n\,t)\Big),$$

kus

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}\, t\right)\, dt = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}\, t\right)\, d\left(\frac{L}{\pi}\, t\right) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

ja $n = 1, 2, 3, \ldots$ jaoks kirjutame

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}\, t\right)\cos(n\,t)\, dt = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}\, t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\cdot\frac{L}{\pi}t\right)\, d\left(\frac{L}{\pi}\, t\right) \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\, dx \end{aligned}$$

ning analoogiliselt leiame b_n,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)\, dx.$$

Minnes esialgses reas tagasi muutujale $x = \frac{L}{\pi}t$, saame sõnastada tulemuse.

Märkus 22.2

($2L$)-perioodilise funktsiooni f Fourier' rida avaldub kujul

$$\mathbf{f(x)} \sim \frac{\mathbf{a_0}}{\mathbf{2}} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}\left(\mathbf{a_n}\cos\left(\frac{\mathbf{n}\,\pi}{\mathbf{L}}\mathbf{x}\right) + \mathbf{b_n}\sin\left(\frac{\mathbf{n}\,\pi}{\mathbf{L}}\mathbf{x}\right)\right) \tag{22.10}$$

kus

$$\mathbf{a_0} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}}\int_{\mathbf{-L}}^{\mathbf{L}} \mathbf{f(x)\, dx} \tag{22.11}$$

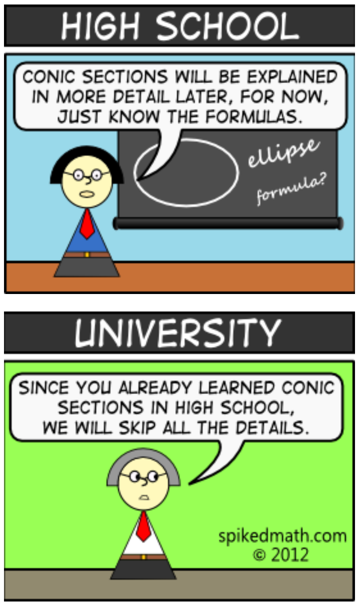
ja

$$\mathbf{a_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}}\int_{\mathbf{-L}}^{\mathbf{L}} \mathbf{f(x)}\cos\left(\frac{\mathbf{n}\,\pi}{\mathbf{L}}\mathbf{x}\right)\mathbf{dx}, \quad \mathbf{n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{22.12}$$

ning

$$\mathbf{b_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}}\int_{\mathbf{-L}}^{\mathbf{L}} \mathbf{f(x)}\sin\left(\frac{\mathbf{n}\,\pi}{\mathbf{L}}\mathbf{x}\right)\mathbf{dx}, \quad \mathbf{n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{22.13}$$

22.10 Näide 2. Ruutlaine

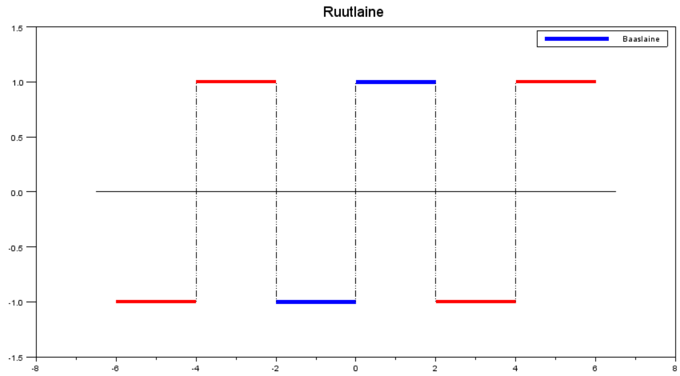


Allikas: spikedmath.com

Vaatleme perioodilist ruutlainet (ka taktsignaal), mida kasutatakse näiteks digitaalsetes lülitites, kellamehhanismides. Muusikas kasutatakse sellist tüüpi lainet puhkpilli ja orelitaolise heli tekitamiseks.

Uurime konkreetsemalt järgmist 4-perioodilist lainet:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & x \in (-2, 0] \\ 1 & x \in (0, 2] \end{array} \right\}. \tag{22.14}$$



Märgime, et pool perioodi $L = 2$. Leiame antud funktsiooni Fourier' rea. Esiteks

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} (-1)\,dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{2} 1\,dx = -1 + 1 = 0.$$

Viimane ütleb, et konstantset lainet rida ei sisalda. Järgnevalt leiame $n = 1, 2, 3, \ldots$ jaoks, et

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\,\pi}{L} x\right)\,dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\,\pi}{2} x\right)\,dx = 0,$$

kuna meil on sümmeetrilised rajad, koosinus on paaris- ja f paaritufunktsioon. Kokku on integraalimärgi all paaritu funktsioon, mille väärtus sümmeetriliste rajade korral on null. Edasi, b_n korral on integraalimärgi all kahe paaritu arvu korrutis, kokku paarisfunktsioon ja võime integraali leida kui kahekordse üle poole intervalli:

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\,\pi}{2} x\right)\,dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{0}^{2} \sin\left(\frac{n\,\pi}{2} x\right)\,dx, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Kirjutame

$$b_n = \int_{0}^{2} \sin\left(\frac{n\,\pi}{2} x\right)\,dx = -\frac{2}{n\,\pi} \cos\left(\frac{n\,\pi}{2} x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{n\,\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right).$$

Paneme tähele, et $\cos(n\pi) = (-1)^n$, seega

$$b_n = \left(1 + (-1)^{n+1}\right) \frac{2}{n\,\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

mille võib kirjutada ka kujul

$$b_n = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4}{n\,\pi} & , \text{ kui } n \text{ on paarisarv} \\ 0 & , \text{ kui } n \text{ on paaritu} \end{array} \right\}.$$

Oleme saanud rea

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x\right)}{2n-1} = \frac{4}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \ldots\right]. \tag{22.15}$$

Viimasel juhul f ja Fourier' rea vahel kehtib võrdus kõikide x korral välja arvatud katkevuspunktides $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Katkevuspunktides koondub Fourier' rida Dirichlet' teoreemi järgi aritmeetiliseks keskmiseks:

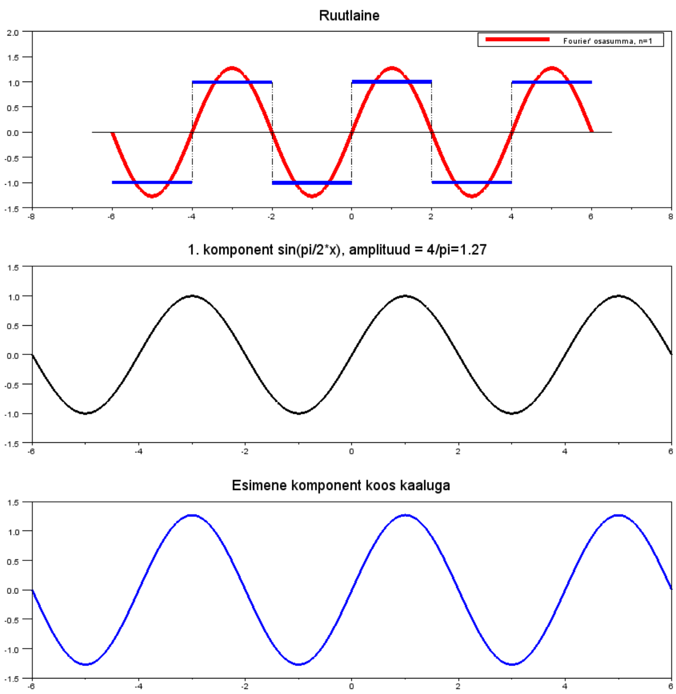
$$S(x) = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0, \quad x = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Järgenvalt vaatleme leitud komponente

$$b_{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x\right) = \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

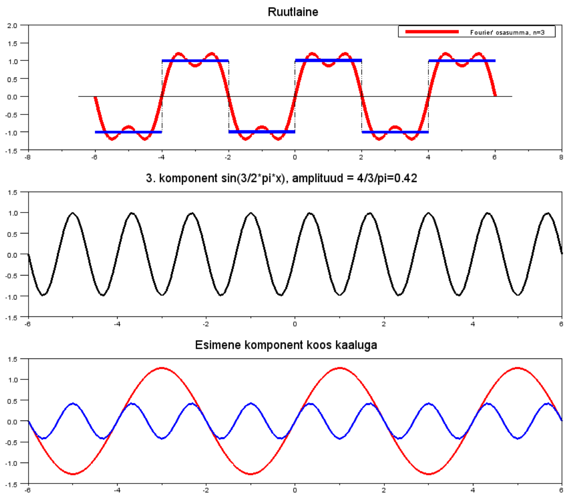
Kui $n = 1$, siis

$$S_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right).$$



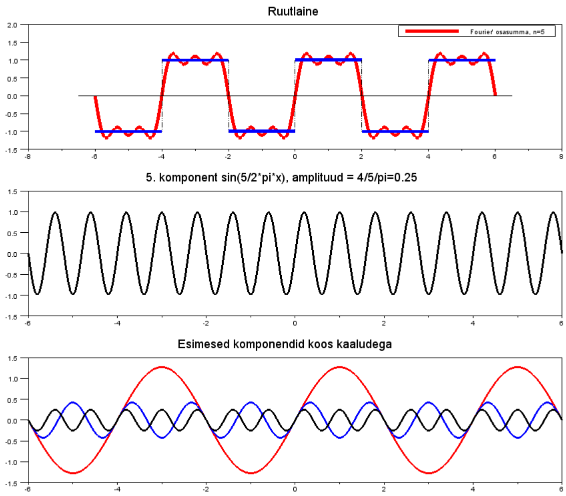
Kui $n = 3$, siis

$$S_3(x) = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) + \frac{4}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2} x\right).$$



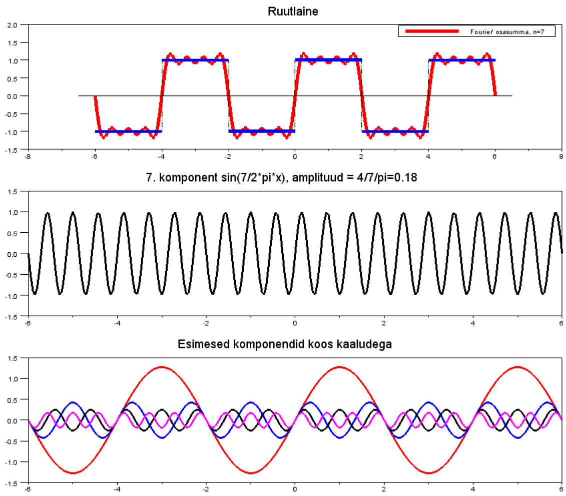
Kui $n = 5$, siis

$$S_5(x) = \frac{4}{\pi}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{4}{3\pi}\,\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \frac{4}{5\pi}\,\sin\left(\frac{5\pi}{2}x\right).$$

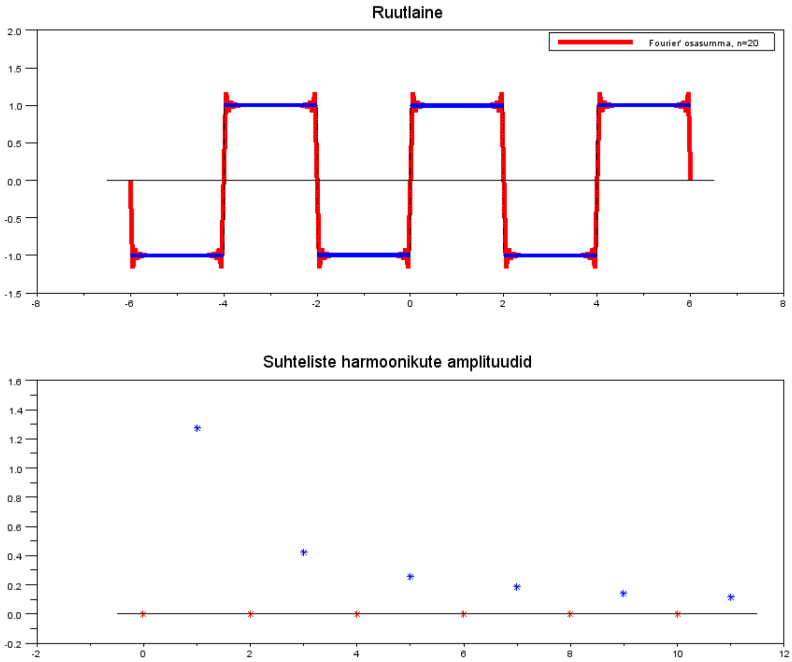


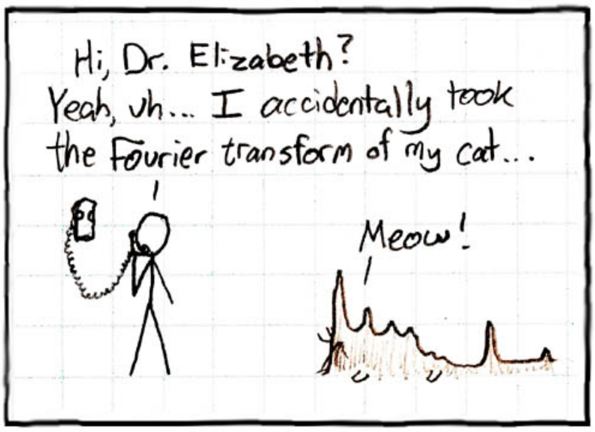
Kui $n = 7$, siis

$$S_7(x) = \frac{4}{\pi}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{4}{3\pi}\,\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \frac{4}{5\pi}\,\sin\left(\frac{5\pi}{2}x\right) + \frac{4}{7\pi}\,\sin\left(\frac{7\pi}{2}x\right).$$



Esimese 20 liikme korral saame järgmise tulemuse.





Allikas: internet

Viited

[1] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.

[2] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[3] N. Piskunov. Diferentsiaal- ja integraalarvutus. 2. köide. Tallinn Valgus, 1983.

[4] I. Stewart. 17 Equations that Changed the World. Profile Books, 2013.

[5] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.

[6] A. E. Yagle. Continuous-Time Fourier Series, EECS 206 Instructor, Fall 2005. University of Michigan, 2005.