

23 Fourier' read komplekskujul

Sisukord

23 Fourier' read komplekskujul	251
23.1 Ringjooneline liikumine, tsüklid	252
23.2 Fourier' read komplekskujul	252
23.3 Komplekssete ja reaalsete kordajate omavaheline seos	255
23.4 Näide. Ruutlaine	256
23.5 Mitteperioodilise funktsiooni Fourier' rida *	260
23.6 Fourier' integraal ja Fourier' teisendus *	263

Eksamiteemad

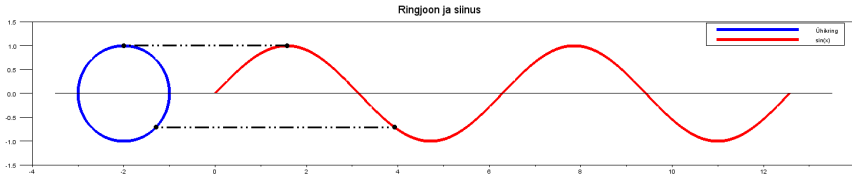
1. Oskama lihtsamal juhul leida funktsiooni $y = f(x)$ Fourier' rida komplekskujul, kui vastavad valemid on ette antud.
2. Oskama leida infot amplituudide, sageduste ja faasinihete kohta kordajatest c_n .

23.1 Ringjooneline liikumine, tsüklid

Euleri valemist teame, et kompleksstasandil saab ühikringjoont kujutada funktsiooniga

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t), \quad i^2 = -1.$$

Kuna avaldis sisaldab nii siinust kui koosinust, saab siit idee Fourier' rea kasutamiseks komplekskujul. Lisaks, tsüklilist või perioodilist sündmust saab iseloomustada ringjooneline liikumisega. Iga punkti asukoht ühikringjoonel on aga leitav koordinaatidega $(\cos(t), \sin(t))$.



Ringjoon on omakorda seotud siinuslaine $A \sin(\omega t + \varphi)$ järgnevalt: kui fikseerida ringjoonel mingi punkt ja panna see vastupäeva ringjoonel konstantse kiirusega liikuma, siis punkti asetatud ajateljega paralleelne laserkiir joonistab siinuse kontuuri. Siinjuures

- Ringjoone raadiusele vastab siinuslaine amplituud A .
- Punkti liikumiskiirusele vastab siinuslaine nurksagedus ω .
- Punkti algpositsioonile ringjoonel vastab siinuslaine faasinihe φ .

Edaspidi, kui me leiame Fourier' rea komponente komplekskujul, siis saame teada ringjoonega seotud parameetrid ning me võime nendele parameetritele vastavusse seada konkreetse siinus- või koosinuslaine (ja vastupidi samuti).

23.2 Fourier' read komplekskujul

Valemite tuletamisel lähtume (2π) -perioodilise funktsiooni f Fourier' reast

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right). \quad (23.1)$$

Esitame koosinuse ja siinuse komplekskujul:

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{-e^{inx}i + e^{-inx}i}{2}. \quad (23.2)$$

Sel juhul saame

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - b_n i}{2} e^{inx} + \frac{a_n + b_n i}{2} e^{-inx} \right). \quad (23.3)$$

Tähistame

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i0x} dx,$$

ja positiivsete n väärtuste jaoks

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - b_n i}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) i dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\cos(nx) - \sin(nx) i \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i nx} dx. \end{aligned}$$

Analoogiliselt toome sisse negatiivsete indeksitega liikmed,

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{a_n + b_n i}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) i dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\cos(nx) + \sin(nx) i \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-n)x} dx. \end{aligned}$$

Definitsioon 23.1

Kui kordajad c_n on määratud valemitega

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i nx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (23.4)$$

siis trigonomeetrilist rida

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i nx} \quad (23.5)$$

nimetatakse funktsiooni f Fourier' reaks komplekskujul.

Kordajaid c_n nimetatakse funktsiooni f Fourier' komplekskordajateks.

Märkus 23.1

Olgu funktsioon f perioodiga $T = 2L$. Siis

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i(n\pi/L)x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (23.6)$$

ja

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi/L)x}. \quad (23.7)$$

Märkus 23.2

Olgu sündmuse sagedus $\sigma = \frac{1}{T}$ perioodiga $T = 2L$. Tähistame nurksageduse

$$\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\sigma. \quad (23.8)$$

Ühikringi elemente

$$e^{in\omega t} \quad (23.9)$$

nimetatakse harmoonikuteks ja arve

$$n\omega = n2\pi\sigma = \frac{n\pi}{L} = n\frac{2\pi}{T}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (23.10)$$

funktsiooni

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

lainearvudeks. Lainearvude hulka nimetatakse spektri. Kordajaid

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (23.11)$$

nimetatakse kompleksamplituudideks.

Mõningates elektro- ja raadiotehnikaalastes töödes nimetatakse amplituudide moodulite $|c_n|$ hulka samuti funktsiooni f spektri.

Näide 23.1 Leiame 1 kHz ühikamplituudiga siinuslaine Fourier' rea ja vastava spektri.

Esiteks märgime, et sagedus $\sigma = 1000 \text{ Hz}$, s.t. periood $T = \frac{1}{1000}$ s. Siit saame nurksageduse (baassageduse),

$$\omega = 2\pi\sigma = 2000\pi \text{ rad/s.}$$

Vastav siinuslaine on kirja pandav valemiga

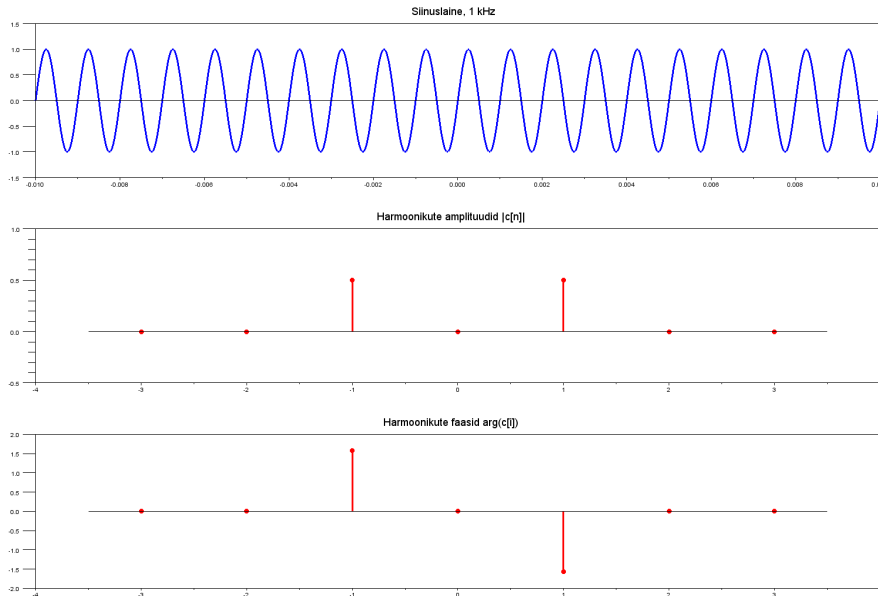
$$\sin(\omega t) = \sin(2000\pi t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kõige kiirem viis Fourier' rea leidmiseks on siin kasutada siinuse kompleksset kuju:

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = -\frac{1}{2}i e^{i\omega t} + \frac{1}{2}i e^{-i\omega t}.$$

Näeme, et

$$c_0 = 0, \quad c_1 = -\frac{1}{2}i, \quad c_{-1} = \frac{1}{2}i, \quad c_n = 0, \quad n = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$$



Teeme juurde kokkuvõtva tabeli.

n	-2	-1	0	1	2
sagedus	-2 kHz	-1 kHz	0 kHz	1 kHz	2 kHz
harmonik	$e^{-i2\omega t}$	$e^{-i\omega t}$	1	$e^{i\omega t}$	$e^{i2\omega t}$
c_n	0	$\frac{1}{2}i$	0	$-\frac{1}{2}i$	0
$ c_n $	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
$\arg(c_n)$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0

◇ ◇ ◇

23.3 Komplekssete ja reaalsete kordajate omavaheline seos

Vaatleme $T = 2L$ -perioodilise funktsiooni reaalsel Fourier' rida

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right) \quad (23.12)$$

ja kompleksset rida

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i(n\omega)t}, \quad (23.13)$$

kus $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Sel juhul eelnevast teame, et

$$c_n = \frac{a_n - b_n i}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + b_n i}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23.14)$$

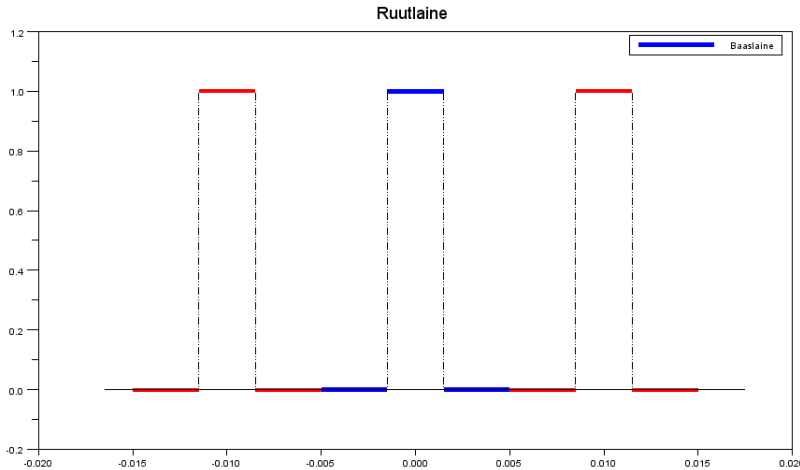
On lihtne näha, et c_n ja c_{-n} omavahel liites või lahutades, saame järgmised seosed:

$$\mathbf{a_0 = 2 c_0, \quad a_n = 2 \operatorname{Re}(c_n), \quad b_n = -2 \operatorname{Im}(c_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots} \quad (23.15)$$

23.4 Näide. Ruutlaine

Vaatleme perioodilist ruutlainet, mille baassagedus on 100 Hz ja ühikamplituudine pulss kestab 3 millisekundit:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad x \in (-1.5 \cdot 10^{-3}, 1.5 \cdot 10^{-3}] \\ 0, \quad x \in (1.5 \cdot 10^{-3}, 10 \cdot 10^{-3}] \end{array} \right\}. \quad (23.16)$$



Märgime, et sagedus $\sigma = 100 \text{ Hz}$, periood $T = 10 \text{ ms}$ ja baassagedus $\omega = 2\pi\sigma = 200\pi \text{ rad/s}$. Leiame antud funktsiooni Fourier' rea komplekskujul.

Esiteks

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{10 \times 10^{-3}} \int_{-5 \times 10^{-3}}^{5 \times 10^{-3}} f(t) dt = \frac{1}{10 \times 10^{-3}} \int_{-1.5 \times 10^{-3}}^{1.5 \times 10^{-3}} 1 dt = \frac{3}{10}.$$

Viimane ütleb, et konstantse laine osakaal on 0.3. Järgnevalt leiame $n = 1, 2, 3, \dots$ jaoks, et

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{10 \times 10^{-3}} \int_{-5 \times 10^{-3}}^{5 \times 10^{-3}} f(t) \cdot e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{10 \times 10^{-3}} \int_{-1.5 \times 10^{-3}}^{1.5 \times 10^{-3}} e^{-in\omega t} dt = -\frac{1}{10 \times 10^{-3}} \cdot \frac{e^{-in\omega t}}{in\omega} \Big|_{t=-1.5 \times 10^{-3}}^{t=1.5 \times 10^{-3}} \\ &= -\frac{e^{-in200\pi \cdot 1.5 \times 10^{-3}} - e^{in200\pi \cdot 1.5 \times 10^{-3}}}{10 \times 10^{-3} in200\pi} = \frac{e^{in0.3\pi} - e^{-in0.3\pi}}{2i\pi n} = \frac{\sin(0.3\pi n)}{\pi n}. \end{aligned}$$

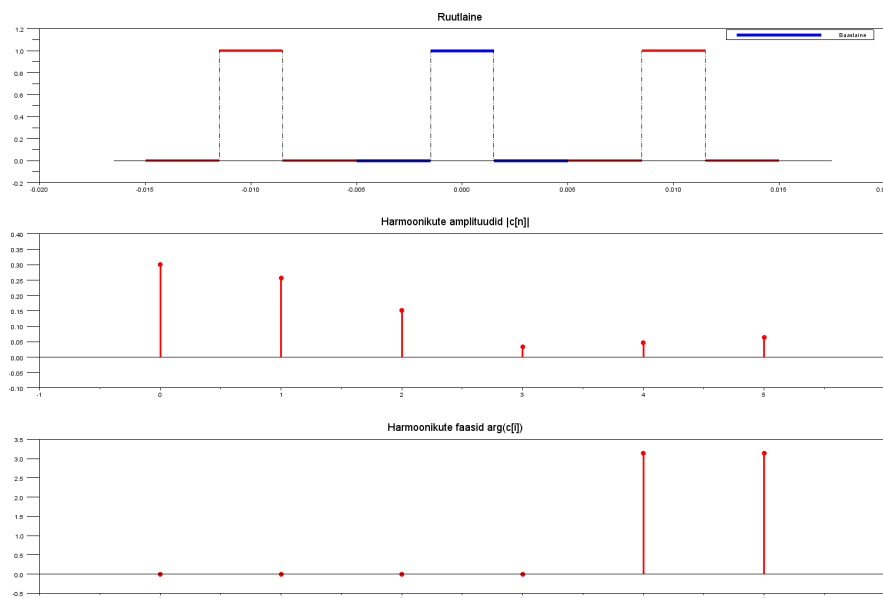
Lihtne on näha, et $c_n = c_{-n}$ iga $n = 1, 2, 3, \dots$ korral. Oleme saanud rea

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i(\omega n)t}, \quad \omega = 200\pi, \quad (23.17)$$

kus

$$c_0 = 0.3, \quad c_n = \frac{\sin(0.3\pi n)}{\pi n}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Paneme tähele, et kõik kordajad c_n on reaalarvud, seega harmoonikute amplituudid saab otse kätte c_n väärtustest ning faasinihked on kõik 0 või π radiaani.



Teeme väikese tabeli harmoonikute kohta:

n	0	1	2	3	4
sagedus	0 Hz	100 Hz	200 Hz	300 Hz	400 Hz
harmoonik	1	$e^{i\omega t}$	$e^{i2\omega t}$	$e^{i3\omega t}$	$e^{i4\omega t}$
c_n	$\frac{3}{10}$	$\frac{\sin(0.3\pi)}{\pi}$	$\frac{\sin(0.6\pi)}{2\pi}$	$\frac{\sin(0.9\pi)}{3\pi}$	$\frac{\sin(1.2\pi)}{4\pi}$
$ c_n $	0.300	0.258	0.151	0.033	0.047
$\arg(c_n)$	0	0	0	0	π

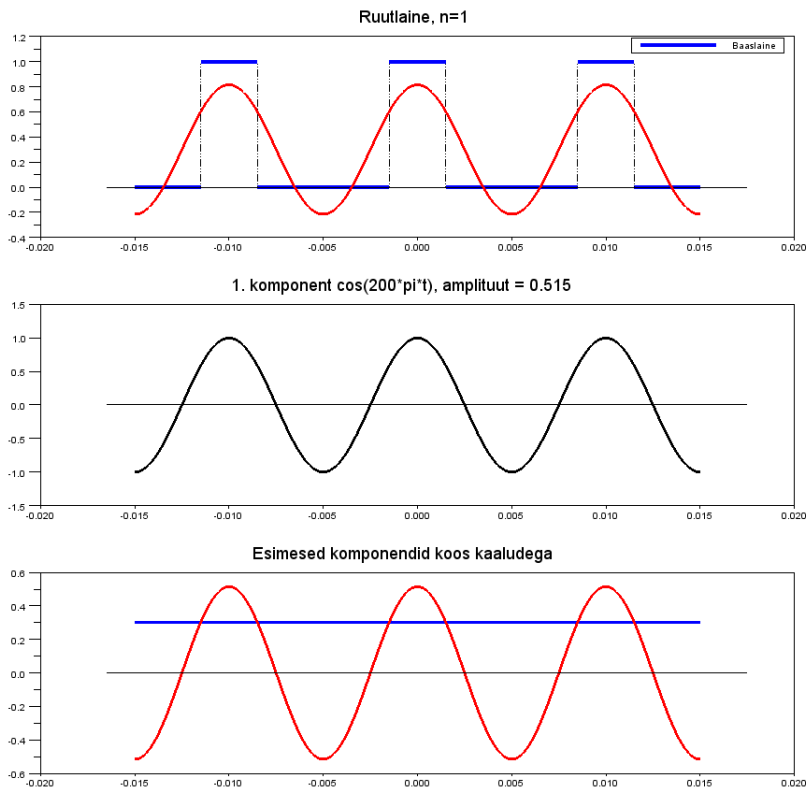
Komplekskujust saab tuletada Fourier' reaalarvulise kuju,

$$\begin{aligned}
 f(t) &\sim 0.3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(0.3\pi n)}{\pi n} \left[e^{i(\omega n)t} + e^{-i(\omega n)t} \right] \\
 &= 0.3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(0.3\pi n)}{\pi n} \cos(\omega n t).
 \end{aligned}$$

Järgnevalt vaatleme leitud komponente.

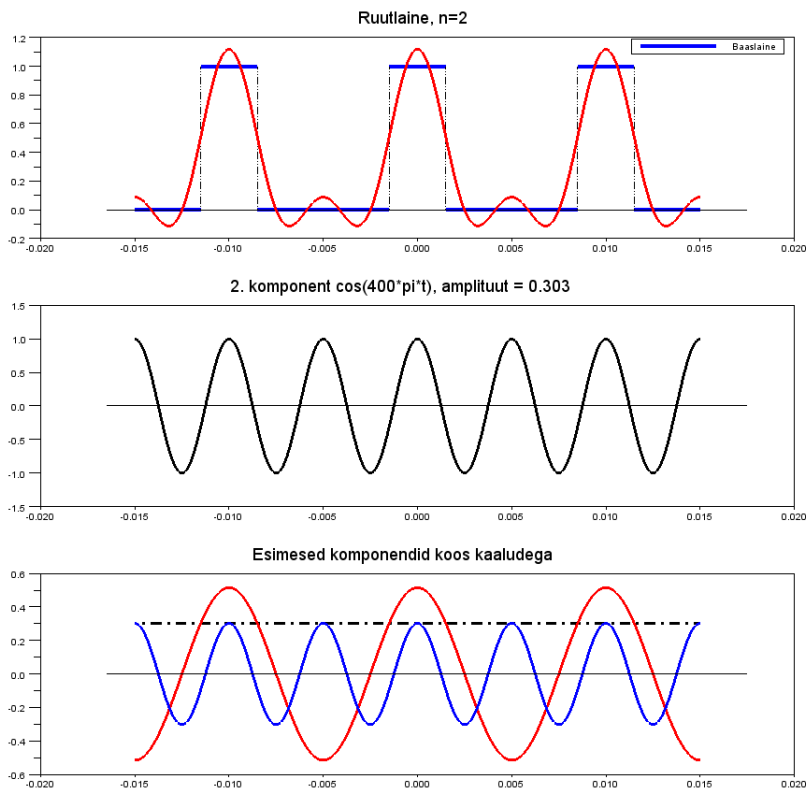
Kui $n = 1$, siis

$$S_1(x) = 0.3 + \frac{2 \sin(0.3\pi)}{\pi} \cos(200\pi t).$$



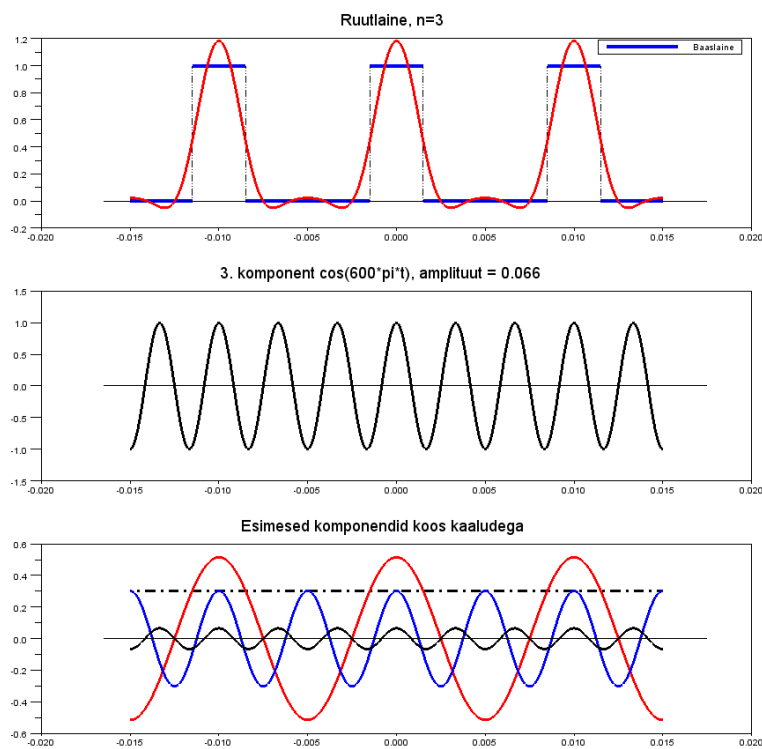
Kui $n = 2$, siis

$$S_2(x) = 0.3 + \frac{2 \sin(0.3 \pi)}{\pi} \cos(200 \pi t) + \frac{\sin(0.6 \pi)}{\pi} \cos(400 \pi t).$$

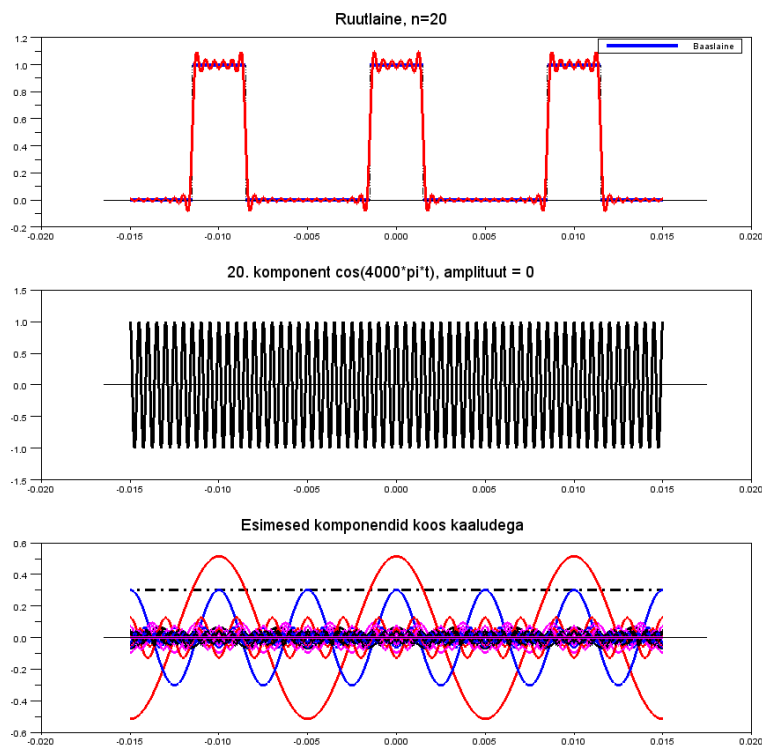


Kui $n = 3$, siis

$$S_3(x) = 0.3 + \frac{2 \sin(0.3 \pi)}{\pi} \cos(200\pi t) + \frac{\sin(0.6 \pi)}{\pi} \cos(400\pi t) + \frac{2 \sin(0.9 \pi)}{3\pi} \cos(600\pi t).$$



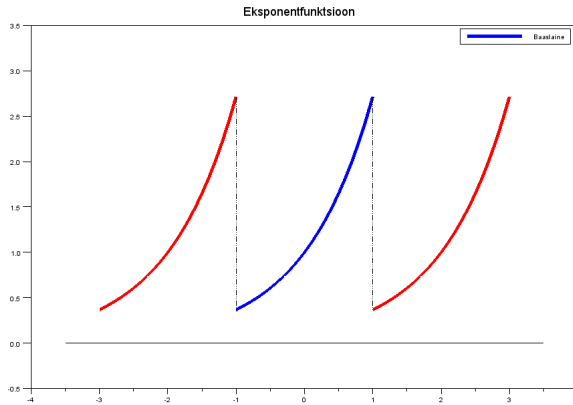
Esimese 20 liikme korral saame järgmise tulemuse.



23.5 Mitteperioodilise funktsiooni Fourier' rida *

Vaatleme järgmise näite varal ([2]), mida teha mitteperioodiliste funktsioonidega. Olgu vaja leida funktsiooni $y = e^t$ Fourier' rida lõigul $[-1, 1]$. Ekspontentfunktsioon ei ole aga perioodiline reaalteljel.

Esimene kõige lihtsam võimalus on moodustada 2-perioodiline funktsioon, kandes lõigus $[-1, 1]$ oleva „etaloni“ (baasfunktsiooni $y = e^t$) üle teistele osalõikudele.



Osutub, et see variant on küll võimalik, kuid annab suhteliselt kehva tulemuse, kuna tekkinud perioodiline funktsioon on katkev. Võib leida, et $T = 2$,
 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

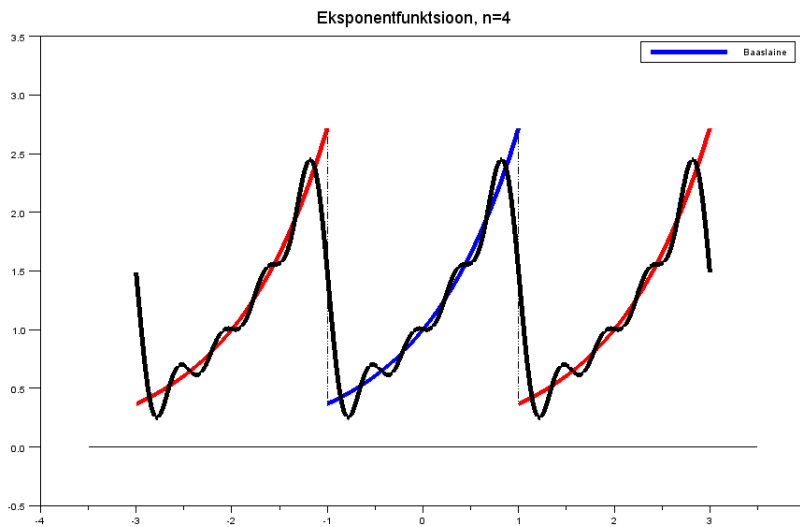
$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_{t=-1}^{t=1} = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1}) = \text{sh}(1) \approx 1.175.$$

ja

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{(1-in\pi)t} dt = \frac{1}{2(1-in\pi)} e^{(1-in\pi)t} \Big|_{t=-1}^{t=1} \\ &= \frac{e^{1-in\pi} - e^{-(1-in\pi)}}{2(1-in\pi)}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

Arvuti abiga võib leida

n	c_n	a_n	b_n
-4	$0.007 - 0.093i$	-	-
-3	$-0.013 + 0.123i$	-	-
-2	$0.029 - 0.182i$	-	-
-1	$-0.108 + 0.340i$	-	-
0	1.175	1.175	-
1	$-0.108 - 0.340i$	-0.216	0.679
2	$0.029 + 0.182i$	0.058	-0.365
3	$-0.013 - 0.123i$	-0.026	0.247
4	$0.007 + 0.093i$	0.015	-0.186

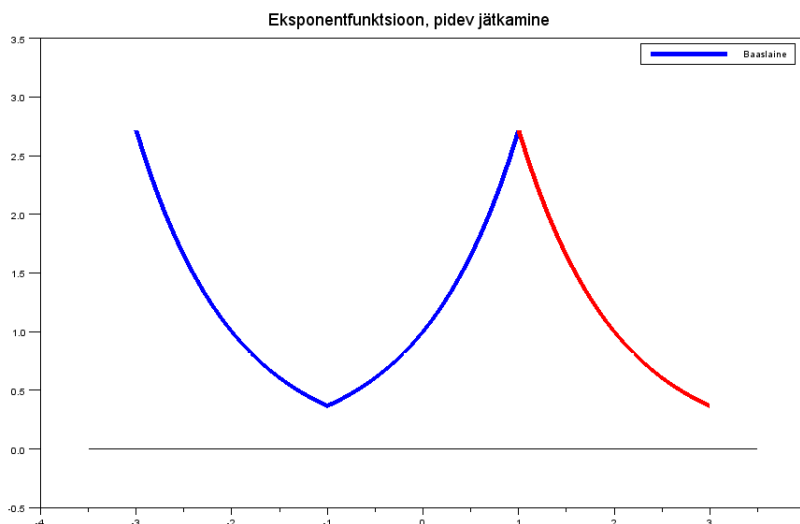


Seega

$$e^t = 1.175 - 0.216 \cos(\pi t) + 0.679 \sin(\pi t) + 0.058 \cos(2\pi t) - 0.365 \sin(2\pi t) \\ - 0.026 \cos(3\pi t) + 0.247 \sin(3\pi t) + 0.015 \cos(4\pi t) - 0.186 \sin(4\pi t), \\ t \in [-1, 1].$$

Maksimaalne viga on ligikaudu 1.22. Võttes n suuremaks, on võimalik tulemust lõigu keskel oluliselt parandada, kuid lõigu $[-1, 1]$ otspunktides on ka $n = 20$ korral viga 1.2 lähedal.

Vaatleme teist võimalust. Jätkame lõigul $[-1, 1]$ olevat eksponentfunktsiooni nii, et tekiks pidev funktsioon (selleks tuleb peegeldada y -telje suhtes):



Meil tekib 4-perioodiline funktsioon, mille baas asub näiteks lõigus $[-3, 1]$. Nihutades seda funktsiooni ühe ühiku võrra paremale, saame paarisfunktsiooni

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{t-1} & , t \in [0, 2] \\ e^{-(t+1)} & , t \in [-2, 0] \end{array} \right\}.$$

Sel juhul

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_{-3}^1 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-2}^0 e^{-(t+1)} dt + \frac{1}{4} \int_0^2 e^{t-1} dt = -\frac{1}{4} e^{-(t+1)} \Big|_{t=-2}^{t=0} + \frac{1}{4} e^{t-1} \Big|_{t=0}^{t=2} = \text{sh}(1)$$

ja kuna $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$, siis

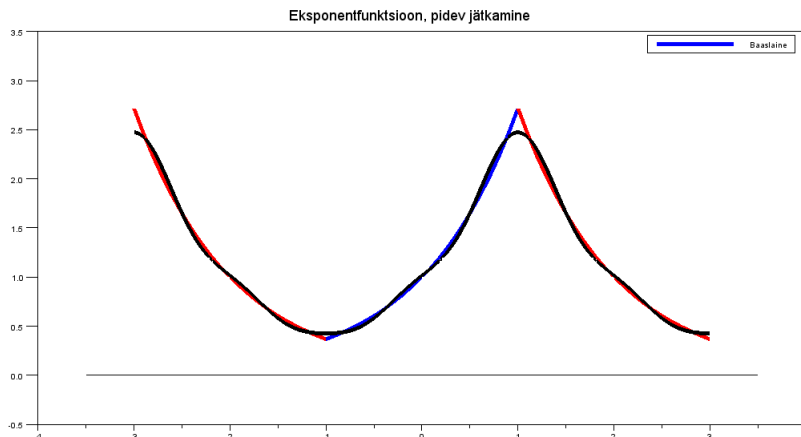
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) \cdot e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{4} \int_{-2}^0 e^{(-1-in\omega)t-1} dt + \frac{1}{4} \int_0^2 e^{(1-in\omega)t-1} dt \\ &= \frac{e^{(-1-in\omega)t-1}}{4(-1-in\omega)} \Big|_{t=-2}^{t=0} + \frac{e^{(1-in\omega)t-1}}{4(1-in\omega)} \Big|_{t=0}^{t=2} = 2 \frac{(-1)^n e - e^{-1}}{4 + n^2\pi^2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

Viimased teisendused on jäetud iseseisvaks läbitöötamiseks. Kuna kõik koefitsiendid c_n tulid reaalarvud, siis järelikult jääb reaalarvulises Fourier' reas järgi ainult koosinuslained.

n	c_n	a_n	b_n
-4	0.029	-	-
-3	-0.066	-	-
-2	0.108	-	-
-1	-0.445	-	-
0	1.175	1.175	-
1	-0.445	-0.890	0
2	0.108	0.216	0
3	-0.066	-0.133	0
4	0.029	0.058	0

Tehes koosinusfunktsioonides nihke ühe võrra tagasi, saame

$$\begin{aligned} e^t &= 1.175 - 0.890 \cos(\pi/2(t+1)) + 0.216 \cos(\pi(t+1)) \\ &\quad - 0.133 \cos(3\pi/2(t+1)) + 0.058 \cos(2\pi(t+1)), \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$



Maksimaalne viga lõigul $[-1, 1]$ funktsiooni e^t ja Fourier' rea vahel on u. 0.246. Võttes näiteks 20 liiget, on maksimaalne viga u. 0.054. Siit ka järeldus, et funktsiooni tuleks jätkata pidevalt, mitte katkevalt. Juba varemgi oleme joonistelt vast märganud, et katkevuspunktide ümber koondub Fourier' rida väga aeglaselt.

Märgime, et funktsioone on võimalik pidevalt jätkata sümmeetriliselt kas siis y -telje suhtes (jäävad ainult koosinusi sisaldavad liikmed) või nullpunkti suhtes (jäävad ainult siinusi sisaldavad liikmed).

23.6 Fourier' integraal ja Fourier' teisendus *

Lõpetuseks anname hästi põgusalt ülevaate Fourier' teisendusest ja pöördteisendusest. Need kaks teemat nõuaksid ilmselt mitut omaette kursust, kuid oma põhimõttelt nad liiga keerulised ka ei ole.

Olgu funktsioon $f(x)$ määratud lõpmatus vahemikus $(-\infty, \infty)$ ja olgu ta seal absoluutselt integreeruv, s.t. eksisteerigu päratu integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Siinjuures me ei eelda funktsiooni f perioodilisust, küll aga olgu tema Fourier' rida vahemikus $(-L, L)$ esitatud kujul

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n 2\pi \sigma t}, \quad \sigma = \frac{1}{2L}, \quad (23.18)$$

kus

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i n 2\pi \sigma t} dt.$$

Kui minna piirile $L \rightarrow \infty$ (laine periood $T = 2L$ läheb lõpmata "pikaks"), siis sagedus σ läheks lõpmata väikeseks (tähistame $d\sigma$) ja tema abil võiks ideeliselt n -iga läbi korrutades ($n d\sigma$) tuletada nn. pideva spektri, s.t. ükskõik millise reaalarvulise sageduse hertsides. Sellisel juhul saab tuletada järgmise tulemuse (vt. [3, 4]).

Definitsioon 23.2

Olgu antud ajast t sõltuv reaalarvuline signaal $f = f(t)$, mis koosneb sagedustest $\sigma \in (-\infty, \infty)$. Funktsiooni f Fourier' teisenduseks $F_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nimetatakse kompleksarvuliste väärtustega funktsiooni

$$(\mathbf{F}_f)(\sigma) = \mathbf{C}(\sigma), \quad \mathbf{C}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) e^{-i2\pi\sigma \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (23.19)$$

Funktsiooni C Fourier' pöördteisenduseks $F_f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse võrdusega

$$(\mathbf{F}_f^{-1})(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}(\sigma) e^{i2\pi\sigma \mathbf{t}} d\sigma \quad (23.20)$$

määratud reaalarvulist funktsiooni f . Teisisõnu, Fourier' teisendus F_f seab signaalile f vastavusse spektraalfunktsiooni C (millest saab välja lugeda funktsiooni f spektri) ja pöördteisendus F_f^{-1} seab spektraalfunktsioonile C vastavusse signaali f .

Märkus 23.3

Fourier' pöördteisendus F_f^{-1} ei pruugi alati algset signaali f taastada, isegi kui Fourier' teisendus F_f eksisteerib. Selle jaoks on olemas konkreetsed teoreemid (vt. nt. [3]).

Definitsioon 23.3

Seejuures võrduse

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) e^{-i2\pi\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{t})} d\mathbf{x} \right) d\sigma. \quad (23.21)$$

paremal pool asuvat päratut integraali nimetatakse funktsiooni f Fourier' integraaliks.

Märkus 23.4

Suurust $\omega = 2\pi\sigma$, $\omega \in (-\infty, \infty)$ nimetatakse lainearvuks, lainearvude spektrit nimetatakse pidevaks spektriks. Samad mõisted võivad vastavalt kontekstist käia sageduse σ kohta.

Funktsiooni $C(\omega)$ nimetatakse ka spektraaltiheduseks. Analoogiliselt Fourier' ridadega, räägitakse vahemikus $(\omega_n, \omega_n + \Delta\omega)$ olevatest lainearvudest, millele vastab kompleksamplituud $C(\omega_n)$.

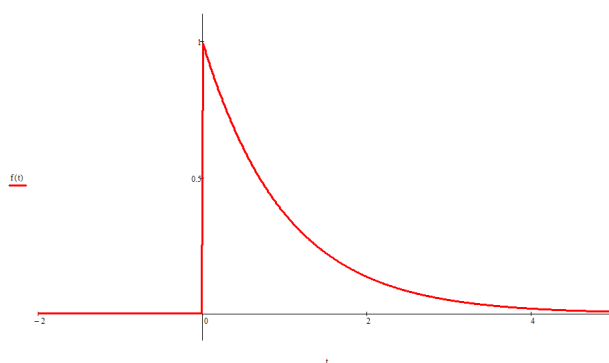
Märkus 23.5

Signaali $f = f(t)$ üksikute komponentide kohta võime öelda järgmist:

Fourier'	spekter	sagedus	amplituud	faasinihe	harmoonik
rida	diskreetne	$n\omega_0 \text{ Hz}$	$ c_n $	$\arg(c_n)$	$e^{in\omega_0 t}$
teisendus	pidev	$\sigma \text{ Hz}$	$ C(\sigma) $	$\arg(C(\sigma))$	$e^{i2\pi\sigma t}$

Näide 23.2 Vaatleme funktsiooni

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-t} & , \quad t \in [0, \infty) \\ 0 & , \quad t \in (-\infty, 0) \end{array} \right\}.$$

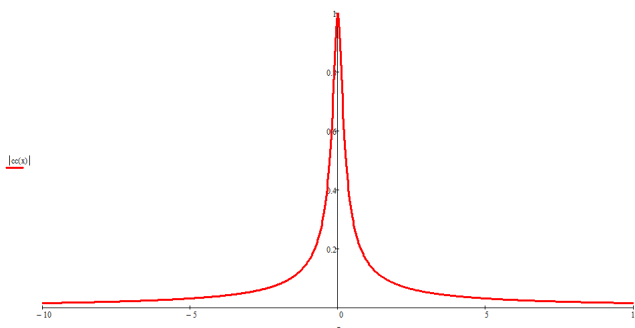


Funktsiooni f Fourier' teisendus on

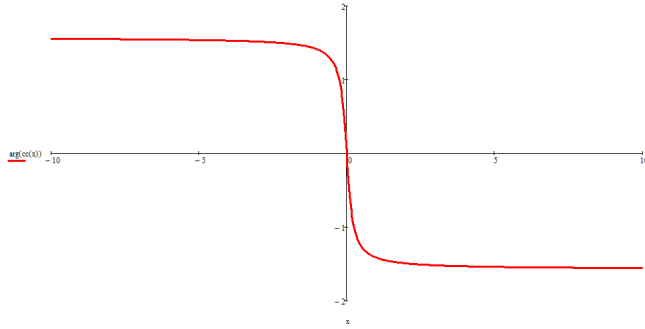
$$\begin{aligned} F_f(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\sigma x} dx = \int_0^{\infty} e^{(-1-i2\pi\sigma)x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(-1-i2\pi\sigma)x}}{-1-i2\pi\sigma} - \frac{1}{-1-i2\pi\sigma} \right] \\ &= \frac{1}{1+i2\pi\sigma} = \frac{1}{1+4\pi^2\sigma^2} - i \frac{2\pi\sigma}{1+4\pi^2\sigma^2}. \end{aligned}$$

Seega seab fourier' teisendus funktsioonile f vastavusse spektraalfunktsiooni

$$C(\sigma) = \frac{1}{1+4\pi^2\sigma^2} - i \frac{2\pi\sigma}{1+4\pi^2\sigma^2}.$$



Siinjuures annab C moodul $|C(\sigma)|$ võnkumiste amplituudid σ hertsi korral, näiteks 0-hertsise komponendi amplituud on 1, võib lisaks leida, et 10.3-hertsise komponendi amplituud on 0.015 jne.



Võib leida $C(\sigma)$ argumenti (nurk kohavektori ja x -telje vahel) radiaani-
des (viimane annab meile sisuliselt vastava komponendi faasinihke),

$$\arg(C(\sigma)) = \arctan\left(-\frac{2\pi\sigma}{1+4\pi^2\sigma^2} : \frac{1}{1+4\pi^2\sigma^2}\right) = -\arctan(2\pi\sigma) \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \quad \sigma \rightarrow \infty.$$

◇ ◇ ◇

Type of Transform	Example Signal
Fourier Transform <i>signals that are continuous and aperiodic</i>	
Fourier Series <i>signals that are continuous and periodic</i>	
Discrete Time Fourier Transform <i>signals that are discrete and aperiodic</i>	
Discrete Fourier Transform <i>signals that are discrete and periodic</i>	

Allikas: [5]

Viited

- [1] betterexplained.com. An Interactive Guide To The Fourier Transform. 2012.
- [2] calculus7.org. Down with sines! 2013.
- [3] A. Lapidoth. A Foundation in Digital Communication. Cambridge University Press, 2009.
- [4] N. Piskunov. Diferentsiaal- ja integraalarvutus. 2. köide. Tallinn Valgus, 1983.
- [5] S. W. Smith. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. Newnes, 2002.
- [6] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.