

1 MTMM.00.188 Kõrgem matemaatika, eksamiteemad 2014

Eksamitöö annab kokku 80 punkti ja ülesanded jagunevad järgmisse kuude gruppi:

P1 (10p) - ülesanded I kontrolltöö põhiteemade peale;

P2 (10p) - ülesanded II kontrolltöö põhiteemade peale;

P3 (15p) - ülesanded ridade peale;

L1 (20p) - mõisted ja definitsioonid;

L2 (15p) - omadused, laused, lemmad ja teoreemid;

L3 (10p) - tõestused.

NB! Ülesandeid ei ole palju, kuid loenguosast võib vabalt tulla 15-punktiline ülesanne, s.t. kui seda ei oska, siis võib punktikadu olla suur.

P1. I kontrolltöö

Praktikumid 1-6.

- Kompleksarvud (algebraalne, geomeetriline, trigonomeetriline, eksponentkuju, n -astme juured).
- Piirväärtuse arvutamine polünoomide jagatisest, tähtsad piirväärtused (nt. $\sin(x) \sim x, x \rightarrow 0$).
- Tuletis, elementaarfunktsioonide tuletiste tabel. Liitfunktsiooni tuletis.
- Tuletise rakendused (joone puutuja leidmine, funktsiooni minimaalse ja maksimaalse väärtuse leidmine). Kiiruste leidmine ja kiiruste tekitamine võrdustesse.
- Diferentsiaal, funktsiooni muudu ligikudne arvutamine.
- Funktsiooni I ja II tuletise omadused, kumeruse ja nõgususe piirkonnad, käänupunkt.

Näide. Leida kompleksarvu $z = 8$ kõik kolmanda astme juured.

Näide. Leida funktsiooni f tuletis, kui
 $f(x) = 3 \cos^5(x^2 - 4x + 1) + 2\pi^3 + \arcsin(4x)$.

Näide. Leida funktsiooni $y = \cos(3x)$ puutujasirge võrrand.

Näide. Leida funktsiooni $y = \tan(x)$ diferentsiaali väärtus punktis $x = \pi/4$ argumentimuudu $\Delta x = 0.1$ korral.

P2. II kontrolltöö

Praktikumid 7-12. Pigem tulevad põhiteemad.

- L'Hospital'i reegel.
- Määramata integraali leidmine (muutuja vahetus, ositi integreerimine).
- Määratud integraali leidmine (muutuja vahetus, absoluutväärtust sisaldavad avaldised, levinud kujundite pindalad).
- Määratud integraali rakendused (teepikkus, nihe, joone kaare pikkus, töö arvutamine, funktsiooni keskmine väärtus, ruumala). Integraalide rakenduste kohta valemeid ette ei anta (küsimused jäävad siiski II kontrolltöö teemade hulka).
- Päratud integraalid.

Näide. Leidke piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x - \tan(x)}.$$

Näide. Integreerige ositi $\int x \cdot e^{-3x} dx$.

Näide. Tehes muutujavahetuse $t = \cos^2(x)$, integreerige

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}} dt.$$

Näide. Leida integraalid

$$\int \sin(2x) dx, \quad \int \sqrt{1+x} dx,$$
$$\int \frac{x}{x^2+1} dx, \quad \int \sin(x) \cos^2(x) dx.$$

Näide. Leidke joontega $y = x^2 + 1$ ja $y = 1$ piiratud kõvertrapetsi pindala.

Näide. Osake alustab liikumist punktis $s(0) = 5$ ja liigub kiirusega $v(t) = t^2 - 4$. Kui kaugemale algpunktist liigub osake esimese 3 sekundi jooksul ja kui pika tee ta läbib (meetrites)?

Näide. Joon $y = \frac{1}{x}$ pöörleb ümber x -telje. Leida tekkinud pöördekeha ruumala, kui $x \in [1, 3]$.

P3. Read

Praktikumid 13-16. Ülesannetes ei tule raskeid ridu (ei sisalda nt. siinuseid või logaritme), kõige tähtsam on ära tunda, kas arvrida saab võrrelda geomeetrilise või harmoonilise reaga või siis kasutada d'Alembert'i, Cauchy, Leibniz'i tunnust.

- Arvread. Koonduvuse või hajumise uurimine.
- Astmereal. Koonduvusraadiuse ja koonduvuspiirkonna leidmine.
- Fourier' read. Kordajate valemiteid ei pea kõiki peast teadma, kuid peaks ära tundma, mis on valemities sisalduvad L , T ja ω . Lisaks nt. reaalsete kordajate korral on ette antud ainult a_n või b_n (teised on loogiliselt tuletatavad).

Näide. Leidke astmereal

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^n} (x-5)^n$$

koonduvusraadius ja koonduvuspiirkond.

Näide. Leidke astmereal

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} \left(\frac{x}{3} - 1\right)^n$$

koonduvusraadius ja koonduvuspiirkond.

Näide. Leidke 8-perioodilise laine

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [-4, 0], \\ -1 & , x \in (0, 4), \end{cases}$$

Fourier' rida komplekskujul. Millist kasulikku informatsiooni sisaldab kordaja c_n ?
Komplekssed kordajad avalduvad valemitega

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Näide. Leidke 4-perioodilise laine

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x \in [0, 2], \\ 0 & , x \in (-2, 0), \end{cases}$$

Fourier' rida. Millal ja milleks koondub antud rida?

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\omega x) dx.$$

L1. Mõisted

Eelkõige on tähtis mõistete sisu, paljudel juhtudel võidakse küsida definitsiooni. Vormistamisel ei tohi unustada, et definitsioon on täislause, kus mõiste on üheselt ja korrektselt kirjeldatud.

1. loeng. Naturaalarvud, täisarvud, ratsionaalarvud, irratsionaalarvud, reaalarvud, kompleksarvud, kaaskompleksarv ja moodul.

2. loeng. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju, kompleksarvu argument, de Moivre'i valem, kompleksarvu n -astme juur.

3. loeng. Kompleksarvu eksponentkuju, Euler'i valem.

4. loeng. Funktsiooni mõiste, paaris- ja paaritufunktsioon, üksühene funktsioon, pealekujutus, pöördfunktsioon, põhilised elementaarfunktsioonid, elementaarfunktsioonid.

5. loeng. Piirväärtuse intuiitvne mõiste (märkus 5.1).

6. loeng. Hääbuv funktsioon. Ekvivalentsed lõpmata väikesed funktsioonid. Pidev funktsioon.

7. loeng. Tuletise definitsioon, tuletise geomeetriline ja füüsikaline tähendus (kiirus).

8. loeng. Kõrgemat järku väike suurus $\alpha = o(\beta)$, diferentseeruv funktsioon (sobib ka T8.1), funktsiooni diferentsiaali arvutamise valem (M8.2) ja diferentsiaali graafiline esitus.

11. loeng. Taylor'i polünoom ja valem (D11.1-11.2), jääkliige Lagrange'i kujul (valem 11.7).

12. loeng. Algfunktsioon, määramata integraal ja selle seos kiiruse ja teepikkusega.

14. loeng. Riemann'i integraali definitsioon, kõvertrapets ja selle pindala.

Näide. Defineerida irratsionaalarvud. Kas $a = -\frac{3}{41067}$ on irratsionaalarv?

Näide. Defineerida kompleksarvu moodul. Leida $z = 3 + 2i$ moodul. Milline on selle geomeetriline tähendus?

Näide. Esitada kompleksarvu Euler'i valem.

Näide. Defineerida üksühene funktsioon. Kas $y = \sin(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$ on üksühene?

Näide. Defineerida elementaarfunktsioon. Tuua näide funktsioonist, mis ei ole elementaarfunktsioon.

Näide. Mida tähendab, et kaks hääbuvat funktsiooni on piirprotsessis $x \rightarrow 1$ ekvivalentsed? Tuua näide.

Näide. Mida tähendab, et funktsioon on diferentseeruv? Tuua näide funktsioonist, mis ei ole diferentseeruv kohal $x = 2$.

Näide. Milline on funktsiooni e^x Taylor'i valemi jääkliige Lagrange'i kujul $n = 10$ korral?

Näide. Defineerida funktsiooni $y = f(x)$ Riemann'i integraal.

Näide. Defineerida kõvertrapets ja selgitada, kuidas arvutatakse selle pindala.

15. loeng. Teepikkuse arvutamine. Kõversektor.

16. loeng. Lõpmatute rajadega integraal, integraali definitsioon katkevast funktsioonist. Päratu integraali koonduvus ja hajuvus.

18. loeng. Arvrida ja selle osasumma, arvrea koondumine ja hajumine.

19. loeng. Absoluutselt koonduv rida, tingimisi koonduv rida.

21. loeng. Astmerea mõiste, astmerea koonduvusraadius (M21.1 ja D21.3) ja koonduvuspiirkond.

22. loeng. Siinuslaine $A \sin(\omega t + \varphi)$ amplituud, sagedus ja faasinihe. Trigonomeetiline rida. Sile funktsioon.

23. loeng. Kui Fourier' rea valem on ette antud, siis peaks teadma, mis on harmoonik, lainearv, kompleksamplituud.

Näide. Kui keha liigub kiirusega $v = v(t)$, siis kuidas te leiate keha poolt läbitud teepikkuse lõigul $[0, T]$?

Näide. Defineerige päratu integraali $\int_a^b f(x) dx$ koondumine, kui funktsioon f on katkev punktis $x = b$.

Näide. Defineerige astmerea osasumma ja koondumine.

Näide. Mis vahe on absoluutselt koondulval ja tingimisi koondulval real. Milline on nendest rida $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1,5}}$?

Näide. Defineerige trigonomeetiline rida.

Näide. Mida nimetatakse Fourier' rea $\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\pi/3)x}$ lainearvudeks ja kompleksamplituudideks?

L2. Omadused, teoreemid, laused

Küsitakse teoreemi, lause või lemma sõnastust (esmatähtis on teada teoreemi sisu, mõnikord on võimalik range sõnastuse asemel ka sisu (hoolikalt) lahti rääkida). Mõnda teoreemi tuleb ära tunda nime järgi (nagu all loetelus).

2. loeng. Kompleksarvude korrutamise ja jagamise geomeetriline tähendus.

3. loeng. Algebra põhiteoreem.

5. loeng. Piirväärtus tõkestatud ja hääbuva funktsiooni korrutisest (T5.2), keskmise muutuja omadus (T5.5).

6. loeng. Märkus 6.5 pideva funktsiooni muudu kohta, elementaarfunktsioonide pidevus (T6.6).

7. loeng. Diferentseeruva funktsiooni pidevus (T7.1).

8. loeng. Funktsiooni ligikaudne arvutamine (näited 8.8-8.10), funktsiooni muudu ligikaudne arvutamine (näide 8.5).

10. loeng. Lagrange'i keskväertusteoreem (T10.4), selle geomeetriline ja füüsikaline sisu. L'Hospital'i reegel (T10.6).

11. loeng. Teoreem funktsiooni ekstreemumide leidumisest (T11.4).

14. loeng. Newton-Leibniz'i valem (T14.2), integraalarvutuse keskväertusteoreem (T14.3).

15. loeng. Kõversektori pindala (L15.1).

16. loeng. Matemaatilise analüüsi I fundamentaalteoreem (T16.1).

18. loeng. Geomeetrilise ja harmoonilise rea koondumise tingimused (L18.1 ja L18.2). Positiivse rea integraalne tunnus (L18.4).

19. loeng. Leibniz'i tunnus vahelduvate märkidega rea kohta (L19.1), d'Alembert'i tunnus (L19.2), Cauchy tunnus (L19.3).

22. loeng. Dirichlet' teoreem (T22.1).

Näide. Kirjeldage kompleksarvude liitmise, korrutamise ja jagamise geomeetrilist tähendust. Mida teha, et punkt $z = 0+1i$ teiseks punkti $z = 4(\cos(30^\circ) + i \sin(30^\circ))$?

Näide. Sõnastada teoreem funktsiooni ekstreemumide leidmiseks. Leida funktsiooni $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ kõik minimaalsed ja maksimaalsed väärtused.

Näide. Tooge vähemalt üks skeem funktsiooni f väärtuste $f(x)$ ligikaudseks arvutamiseks. Arvutage ligikaudu $f(-1.1)$, kui $f(x) = e^{x+1}$.

Näide. Sõnastage piirväärtuse keskmise muutuja omadus.

Näide. Sõnastage algebra põhiteoreem.

Näide. Sõnastage integraalarvutuse keskväertusteoreem. Leida funktsiooni $f(x) = x^2 - 3x + 1$ keskmine väärtus lõigul $[0, 1]$.

Näide. Sõnastage teoreem Neton'i-Leibniz'i valemi kasutamise kohta. Leidke määratud integraal $\int_{-1}^1 f(x) dx$, kui

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x \in [-1, 0], \\ 1 & , x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Näide. Sõnastage Lagrange'i keskväertusteoreem. Milline on selle füüsikaline sisu?

Näide. Kui leida funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x \in [-1, 0], \\ 1 & , x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Fourier' rida $S(x)$, siis milline on selle rea koondumine Dirichlet' teoreemi järgi (Fourier' rida ennast ei ole vaja leida)?

L3. Tõestused

6. loeng. Piirväärtuse $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ tõestus.

7. loeng. Lähtudes tuletise definitsioonist, peaks oskama näidata lihtsamaid elementaarfunktsioonide tuletisi.

10. loeng. Tõestused, kasutades Lagrange'i keskvaartusteoreemi (näited 10.3-10.4).

11. loeng. Lihtsamal juhul Taylor'i rea leidmine ja jääkliikme hindamine (Näide 11.1, 11.2).

14. loeng. Lähtudes Riemann'i integraali definitsioonist, tõestada, et $\int_a^b C dx = C(b - a)$, kus C on mingi reaalarv.

18. loeng. Positiivse rea integraalse tunnuse tõestus (lause 18.4).

Näide. Lähtudes tuletise definitsioonist, näidata, et

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b.$$

Näide. Lähtudes tuletise definitsioonist, näidata, et

$$(1/x)' = -1/x^2.$$

Näide. Tõestada, et

$$\sin(x) \leq x, \quad x \geq 0.$$

Näide. Tõestada, et

$$b^5 - a^5 \leq 5b^4(b - a),$$

kui $b > a, b \geq 1$.

Näide. Lähtudes Riemann'i integraali definitsioonist, näidata, et $\int_{-1}^1 5 dx = 10$.

Näide. Sõnastada ja tõestada positiivse rea integraalne tunnus. Kasutades integraalset tunnust, uurida rea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)^2}$ koonduvust.