3 Kompleksarvu eksponentkuju ja selle rakendused

Sisukord

Kontrolltöö teemad

1. Kompleksarvu eksponentkuju, teisendamine algebralisele kujule ja vastupidi (näide 3.1).
2. Tehted eksponentkujul antud kompleksarvudega. Töösse ei tule ülesandeid nagu näidetes 3.2-3.4. Teisenduste näiteid leiab aga hulgaliselt viimases tärniga peatükist.
3. Euler'i valem.
4. Algebraliste võrrandite lahendamine lihtsamal juhul (näited 3.5-3.7).

Eksamiteemad

1. Kompleksarvu eksponentkuju.
2. Euler'i valem ja Euler'i samasus.
3. N-astme algebraline võrrand.
4. Algebra põhiteoreem.

3.1 Kompleksarvu eksponentkuju

Trigonomeetrilisi funktsioone ja eksponentfunktsiooni seob Euler'i valem

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\cdot\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\cdot\sin\varphi \tag{3.1}$$

kus φ on suvaline reaalarv ja $e \approx 2.71828$ on naturaallogaritmi alus,

$$\ln(x) = y, \quad x > 0 \quad \leftrightarrow \quad e^y = x, \quad \ln(e) = 1, \quad \ln(1) = 0.$$

Tõestus baseerub siinkohal lõpmatutel ridadel, mida me ei ole veel õppinud. Kuna trigonomeetrilise kuju järgi $z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, siis Euler'i valemi põhjal saab kompleksarvu z esitada nn. eksponentkujul.

Kompleksarvu z eksponentkujuks nimetatakse järgmist esitust:

$$\mathbf{z} = \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}^{\mathbf{i}\cdot\varphi}, \tag{3.2}$$

kus r on kompleksarvu moodul ja φ on kompleksarvu argument.

Eksponentkuju lubab kompleksarve väga kompaktselt kirja panna. Kasulik on see eelkõige koordinaatidesüsteemi r ja φ jaoks.

Märkus 3.1

Paneme tähele, et kompleksarvud $e^{i\,\varphi}$ on kõik ühikringi elemendid kompleksitasandil.

Näide 3.1 Viia kompleksarv $z = -1 - \sqrt{3}\cdot i$ eksponentkujule.
Leiame mooduli

$$r = \sqrt{3+1} = 2.$$

Arv z asub III veerandis. Seega leiame argumendi järgmiselt:

$$\varphi = \pi + \arctan\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi.$$

Siit saame korraga kirjutada nii trigonomeetrilise kuju kui ka lühema eksponentkuju:

$$z = 2\cdot\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\,\sin\frac{4}{3}\pi\right) = 2\cdot e^{i\cdot\frac{4}{3}\pi}.$$

Kuna nurk $-\frac{2}{3}\pi$ liigutab meid samasse punkti, siis võib kirjutada ka

$$z = e^{-i\cdot\frac{2}{3}\pi}.$$

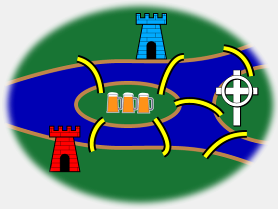
◇ ◇ ◇

Arv e on nn. Euler'i arv šveitsi matemaatiku **Leonhard Paul Euler'i (1707 - 1783)** järgi (aastast 1727).

Johann Georg Brucker'i portree Leonhard Euler'ist (Allikas: Wikipedia)

Kuna Euler viibis enamuse oma täiskasvanu east Sankt-Peterburg'is, siis kohati nimetatakse teda ka vene matemaatikuks. Euler oli esimene, kes võttis arvu e põhjalikumalt uurimise alla, enne teda mainivad arvu e veel näiteks Jacob Bernoulli ja Gottfried Leibniz. Euler oli esimene, kes näitas 1737. aastal, et e on irratsionaalarv, 1748. aastal arvutas Euler arvu e esimesed 18 komakohta (vt. [5]).

Leonhard Euler'it on nimetatud ka kui läbi aegade kõige olulisemaks matemaatikuks (see viimane teema on muidugi väga subjektiivne). Euler on populaarteaduslikus kirjanduses eelkõige tuntud kui Königsberg'i sildade probleemi lahendaja (eelkõige siis range matemaatilise lahenduse mõttes). Omal ajal kerkis ülesse probleem, kas saab läbida Königsbergi 7 silda nii, et alustades mingist punktist, jõuab tagasi algusesse, sealjuures tuleb kõiki sildu läbitada vaid ühe korra.



Königsberg'i sillad (Allikas: Wikipedia)

Märkus 3.2

Erijuhul, kui $\varphi = \pi$, saame Euler'i samasuse

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\cdot\pi} + \mathbf{1} = \mathbf{0}, \tag{3.3}$$

mis kaasab ühte lihtsasse valemisse 5 tähtsamat matemaatilist konstanti ja lisaks 4 põhitehet: astendamist, korrutamist liitmist ja võrdust. Viimase põhjal peavad paljud matemaatikud Euler'i samasust läbi aegade üheks kõige ilusamaks valemiks. Kui kirjutada

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\cdot\pi} = -\mathbf{1},$$

siis võib näha, et irratsionaalarvu e aste imaginaararvuga $i\pi$ annab tulemuseks täisarvu (reaalarvu) -1. Üsna kummaline, eks ole?

Harvard'i matemaatik Benjamin Pierce ütleb: "Me ei suuda seda (samasust) mõista ja me ei tea, mida see täpselt tähendab, kuid me oleme selle tõestanud ja seeläbi me teame, et see peab olema tõde."

Briti teaduskirjaniku David Darling'i sõnul on arv e võimalik, et kõige tähtsam konstant matemaatikas, olles palju olulisem ja üldlevinum kui meile kõigile tuttav π. Olgu tegelikult kuidas on, aga eksponentfunktsiooni e^x häid omadusi saame järgmistes loengutes veel korduvalt näha.

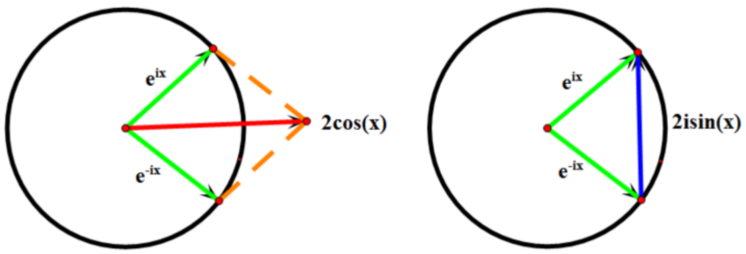
Märkus 3.3

Euler'i valem lubab meil tuletada siinuse ja koosinuse alternatiivsed avaldised. Nimelt,

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\,\sin\varphi, \\ e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\,\sin\varphi. \end{aligned}$$

Vastavalt mõlemat avaldist kas liites või lahutades, saame

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\varphi}}{\mathbf{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\varphi}}{\mathbf{2i}}. \tag{3.4}$$



Allikas: http://mathforum.org/mathimages

Huumoriga pooleks võib öelda, et

Arvu e on lihtsam hääldada kui arvu π;

Arvu e saab arvutis lihtsalt klaviatuurilt sisestada, samas kui π nõuab erivahendeid;

Arv $\ln(\pi)$ on väga "jube" number, samas kui $\ln(e) = 1$;

Arvu e kasutatakse "kõrgemas" matemaatikas, samal ajal kui π jääb "lihtsate" põhikooli tasemel geomeetria probleemide jaoks;

Arvu e kasutamiseks ei pea teadma kreeka tähestikku.

3.2 Tehted eksponentkujul antud kompleksarvudega

Olgu antud kaks kompleksarvu eksponentkujul $z_1 = r_1\,e^{i\varphi_1}$ ja $z_2 = r_2\,e^{i\varphi_2}$. Siis

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;
3. $z^n = (r\,e^{i\varphi})^n = r^n\,e^{i\,n\,\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}$;
4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\,\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$

Tehted on tuletatavad Euler'i valemi ja trigonomeetrilise esituse kaudu.

Näide 3.2 Kompleksarvud ja nende eksponentkuju koos Euler'i valemiga lubavad väga lihtsalt tuletada mõningaid raskesti meeldejäävaid trigonomeetrilisi valemeid. Näiteks,

$$\begin{aligned} z &= \cos(a+b) + i\sin(a+b) = e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} \\ &= (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) \\ &= (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + (\cos a\sin b + \sin a\cos b)i. \end{aligned}$$

Avaldised on võrdsed, kui nende vastavad reaalosad ja imaginaarosad on omavahel võrdsed, seega saame ühest teisendusest lausa kaks valemit:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b, \\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 3.3 Vaatleme veel näiteks järgmist teisendust:

$$\begin{aligned} z &= \cos(2a) + i\sin(2a) = e^{i2a} = (e^{ia})^2 = (\cos a + i\sin a)^2 \\ &= (\cos^2 a - \sin^2 a) + (2\sin a\cos a)i \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a, \\ \sin(2a) &= 2\sin a\cos a. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 3.4 Euler'i valem lubab meil väga kergelt liita erinevaid siinus- või koosinusfunktsioone, näiteks

$$\begin{aligned} &\cos(10\varphi) + \cos(11\varphi) + \cos(12\varphi) = Re(e^{i\,10\varphi} + e^{i\,11\varphi} + e^{i\,12\varphi}) \\ &= Re(e^{i\,10\varphi}\cdot(1 + e^{i\,\varphi} + e^{i\,2\varphi})) = Re(e^{i\,10\varphi}\cdot(1 + e^{i\,\varphi} + (e^{i\,\varphi})^2)) \\ &= Re\left(e^{i\,10\varphi}\cdot\tfrac{1-e^{i\,3\varphi}}{1-e^{i\,\varphi}}\right). \end{aligned}$$

Viimases summas $e^{i\,\varphi}$ astmetest kasutasime geomeetrilise rea valemit

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Siit saab veel edasi teisendada, veidi tehniline, kuid standardne võte:

$$\frac{1-e^{i\,3\varphi}}{1-e^{i\,\varphi}} = \frac{e^{i\,\frac{3}{2}\varphi}e^{-i\,\frac{3}{2}\varphi} - e^{i\,\frac{3}{2}\varphi}e^{i\,\frac{3}{2}\varphi}}{e^{i\,\frac{1}{2}\varphi}e^{-i\,\frac{1}{2}\varphi} - e^{i\,\frac{1}{2}\varphi}e^{i\,\frac{1}{2}\varphi}} = e^{i\,\varphi}\cdot\frac{e^{i\,\frac{3}{2}\varphi} - e^{-i\,\frac{3}{2}\varphi}}{e^{i\,\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\,\frac{\varphi}{2}}} = e^{i\,\varphi}\cdot\frac{\sin\frac{3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Kokkuvõtteks saame vastuseks

$$\cos(10\varphi) + \cos(11\varphi) + \cos(12\varphi) = \frac{\sin\frac{3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot Re(e^{i\,11\varphi}) = \frac{\sin\frac{3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos(11\varphi).$$

Antud lahenduse korral on huvitav see, et umbes sama töö teeksime ära siis, kui koosinuseid oleks summas kolme asemel kasvõi tuhandeid.

◇ ◇ ◇

Üks humoorikas lugu (ilmselt siiski legend, [1]). Denis Diderot oli 18. sajandi prantsuse filosoof, kes reisis palju mööda Euroopat. Oma teekonnal sattus ta ka Sankt-Peterburg'i. Oma sarmiga kogus ta kiiresti enda ümber noori järgijaid ja sama juhtus tema ateistliku filosoofiaga. Viimane tegi murelikuks vene keisrinna Katariina II.

Samal ajal töötas Sankt-peterburg'is Leonhard Euler, kes vastupidiselt Diderot'le oli pühendunud kristlane. Keisrinna Katariina II palus Euler'it oma mures aidata, mille peale Euler tutvustaski ennast Diderot'le kui meest, kes leidis matemaatilise tõestuse Jumala olemasolust.

Kindla olemisega seletas ta Diderot'le: “Härra, võrdus $\frac{a+b^n}{n} = x$ kehtib. Järelikult, Jumal on olemas. Mis Te tolle peale kostate?” Selle peale oli kiire taibuga Diderot sõnatu (kelle teadmised algebrast olid nullilähedased). Ta naerdi tema poolehoidjate poolt välja ja järgmisel päeval küsis luba naaseda tagasi Prantsusmaale. Märgime, et Euler'i toodud avaldis ei tähenda ilmselt midagi erilist.

Ja rääkides veel naljadest ...

Üks üsna vaimukas (ja võimalik, et väga sügavamõtteline ... ning on seoses ka meie eelmise naljaga) internetis olev vastus küsimusele: “Millist praktilist väärtust annab samasus $e^{i\pi} + 1 = 0$?” kõlas:

“Kõige olulisem väärtus on see, et nii mõnedki tüütud filosoofid on sunnitud vaikkima”.

3.3 Algebraliste võrrandite lahendamisest

Definitsioon 3.1

Võrrandit

$$P_n(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (3.5)$$

nimetatakse n-nda astme algebraliseks võrrandiks. Kordajad $a_0, \ldots, a_n$ võivad olla nii reaalsed kui komplekssed, kusjuures $a_0 \neq 0$.

Teoreem 3.1

Algebra põhiteoreem. Igal n-nda astme algebralisel võrrandil on kompleksarvude hulgas n lahendit (kui lugeda kordsed (võrdsed) lahendid erinevaks).

Algebra põhiteoreemi tõestuse idee seotakse tavaliselt saksa matemaatiku Carl Friedrich Gauss'i nimega aastast 1797, kuid hiljem on seda mitte päris veatut tõestust mõnede kohtade peal täiendatud. Teisiti, selle lihtsalt kõlava ja üsna tähtsa teoreemi tõestamisel on vaeva näinud päris paljud matemaatikud.

Teoreem ütleb meile, et n erineva lahendi leidmisel ei ole vaja enam edasi otsida ja väiksema arvu kui n korral, tuleks "edasi kaevata".

Näide 3.5 Lahendame võrrandi

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0.$$

Selle võrrandi saame esitada kujul

$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x-2)^2(x+2)^2 = 0.$$

Siit järeldub, et peavad kehtima

$$(x-2)^2 = 0, \quad (x+2)^2 = 0.$$

Seega esialgse võrrandi lahendid on $x_1 = x_2 = 2$ ja $x_3 = x_4 = -2$. Algebra põhiteoreemi järgi teame, et rohkem lahendeid olla ei saa.

◇ ◇ ◇

Polünoom $P_n(x)$ lahutub järgmiste (reaalarvude vallas taandumatute) tegurite korrutiseks

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}, \qquad (3.6)$$

kusjuures ruutkolmliikmed $x^2 + p_jx + q_j$, $j = 1, \ldots, r$ on positiivsed, s.t. vastavad ruutvõrrandid $x^2 + p_jx + q_j$, $j = 1, \ldots, r$, ei oma reaalarvulisi lahendeid. Seega on reaalarvud $x_1, x_2, \ldots, x_m$ võrrandi (3.5) lahendid vastavalt kordsusega $k_1, \ldots, k_m$, selle võrrandi kompleksarvuliste lahendite leidmiseks tuleb lahendada ruutvõrrandid

$$x^2 + p_jx + q_j = 0, \quad j = 1, \ldots, r, \qquad (3.7)$$

(lahenditeks on kaaskompleksarvude paar).

Seda skeemi ei pea eksamil ja kontrolltöödes detailselt teadma, kuid see kirjeldab ideed kordsete lahendite arvu määramiseks.

Näide 3.6 Lahendame võrrandi

$$x^3 - 1 = 0.$$

Selle võrrandi saame esitada kujul

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Reaalne lahend on $x_1 = 1$ ja kompleksed lahendid on

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

ehk $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ja $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Märgime, et veelgi lihtsam on leida kolmandat juurt ühest (võrrand on samaväärne avaldisega $x^3 = 1$ ehk $\sqrt[3]{x} = 1$). Viimane avaldub seosena

$$x_{k+1} = e^{i \cdot \frac{0 + 2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

◇ ◇ ◇

Kasutades võrrandi $x^3 - 1 = 0$ lahendamiseks komplekstasandil ligikaudseid meetodeid (näiteks Newton'i meetod - iteratsioonimeetod - mida te ilmselt õpite kunagi hiljem), siis võib saada midagi sellist:

Greg Fowler'i teos
Allikas: [5]
Nullkohtade x_1, x_2 ja x_3 ümber jäävaid suuri ovaalseid alasi kutsutakse ka pulli silmadeks.

Näide 3.7 Lahendame võrrandi

$$x^6 - 2x^3 + 2 = 0.$$

Siin viib väga lihtsalt sihile järgmine standardvõte: tähistame $z = x^3$. Sel juhul saame võrrandi

$$z^2 - 2z + 2 = 0,$$

mille lahenditeks on

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i.$$

Lahendi x leidmiseks peame leidma kolmanda astme juured arvudest $1+i$ ja $1-i$,

$$x_{1,2,3} = z_1^{\frac{1}{3}} = (1+i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ja

$$x_{4,5,6} = z_2^{\frac{1}{3}} = (1-i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Seega

$$\begin{aligned} x_{1,2,3} &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left((8k+1)\tfrac{\pi}{12}\right) + i \sin\left((8k+1)\tfrac{\pi}{12}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} x_{4,5,6} &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left((8k-1)\tfrac{\pi}{12}\right) + i \sin\left((8k-1)\tfrac{\pi}{12}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

3.4 Kompleksarvude kasutamine vooluahelate korral *

Vahelduvvooluahelas elektrivoolule avaldatavat takistust nimetatakse näivtakistuseks või ka impedantsiks Z. Impedantsi Z esitatakse kompleksarvuna

$$Z = R + j\,X, \quad j^2 = -1.$$

See koosneb kahest komponendist: aktiivtakistusest R (iseloomustab elektrienergia muundumist teist liiki energiaks, näiteks soojuseks) ja reaktiivtakistusest X (iseloomustab elektrienergia perioodilist võnkumist ahelaelementide vahel.

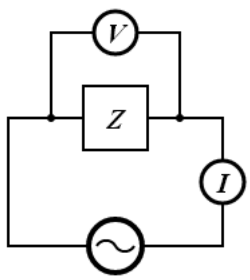
Induktiivsete ahelaelementide reaktiivtakistus on induktiivtakistus X_L ja mahtuvuslike elementide reaktiivtakistus on mahtuvustakistus X_C).

Ideaalse takisti korral puudub reaktiivtakistus ($\varphi = 0$), ideaalsel induktsioonipoolil ja kondensaatoril puudub aktiivtakistus (vastavalt $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ja $\varphi = -\frac{\pi}{2}$). Tihti on aga reaalelus mingil määral esindatud mõlemad komponendid - aktiivtakistus ja reaktiivtakistus.

Seoses impedantsiga Z kehtib Ohm'i seaduse üldistus

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}, \tag{3.8}$$

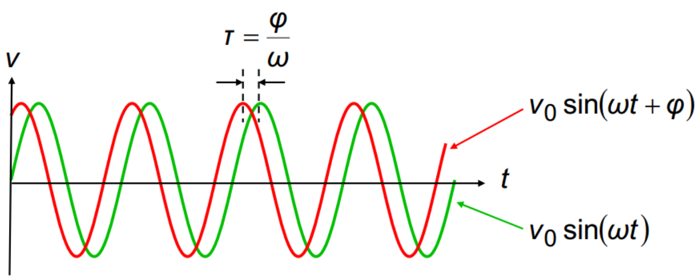
kus V on pinge ja I voolutugevus (mõlemad peavad olema komplekssed).



Vahelduvvoolu korral on tüüpiliselt tegemist siinuslainega, mida saab kirjeldada kui ajast t sõltuvat funktsiooni

$$v_0\,\sin(\omega\,t + \varphi), \tag{3.9}$$

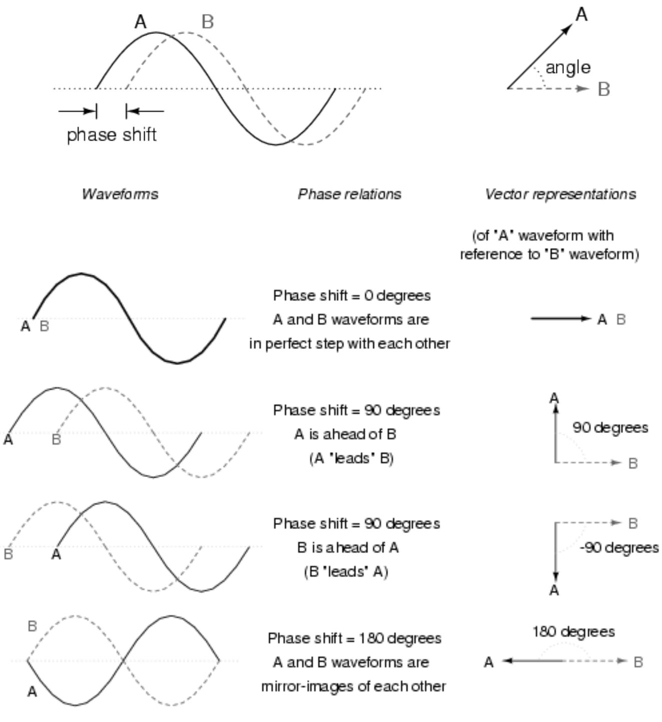
kus v_0 on pinge efektiivväärtus (võnkumise maksimaalne amplituud), φ on pinge algfaas ja $\omega = 2\pi\,f$ on võnkumise nurksagedus (f on sagedus).



Antud siinuslainele saab vastavusse seada kindla vektori, mille pikkus on võrdne laine amplituudiga ja nurga $\omega\, t + \varphi$ saab siduda "faasinihkega" mingi teise (baas-) laine suhtes. Kuna vektorile saab vastavusse seada kompleksarvu, siis kasutataksegi kompleksarve elektrotehnikas üsna massiliselt. Eespool toodud joonise korral võiksime kasutada järgmist vastavusse seadmist:

$$v_0 \sin(\omega\, t + \varphi) \quad \longleftrightarrow \quad Im(v_0\, e^{j\,(\omega\, t + \varphi)}).$$

Fikseeritud aja t korral võime kasutada lihtsalt kompleksarvu $v_0\, e^{j\,\varphi}$ ja siinuslaine korral võtta hiljem sellest imaginaarosa ja koosinuslaine korral reaalosa.

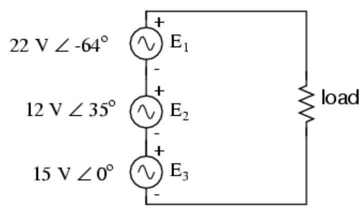


Allikas: [6]

Näide 3.8

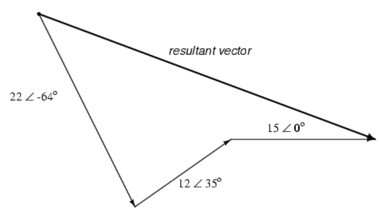
Olgu meil antud vahelduvvoolu ahelas kolm vooluallikat, milles ühes on 22 V vool faasiga $-64\,°$, teises allikas 12 V vool faasiga $25\,°$ ja kolmandas 15 V faasiga $0\,°$. Sel juhul saame kolmele allikale vastavusse seada kompleksarvud

$$\begin{aligned} v_1 &= 22\, e^{j\,(-64\frac{\pi}{180})} && \approx 9.64 - 19.77\, j, \\ v_2 &= 12\, e^{j\,35\frac{\pi}{180}} && \approx 9.83 + 6.88\, j, \\ v_3 &= 15\, e^{j\,0} && = 15 + 0\, j. \end{aligned}$$



Paralleelühenduse puhul pinged summeeritakse, seega summaarse pinge saab leida avaldisest

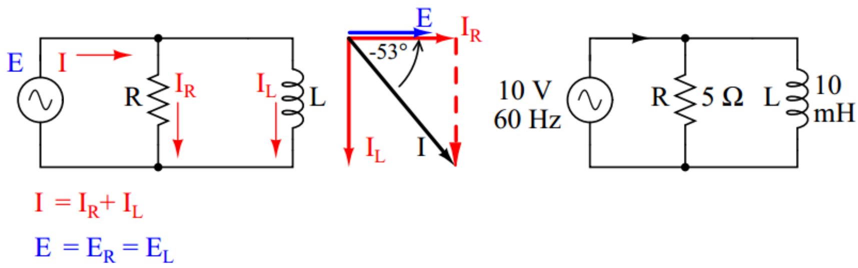
$$v = v_1 + v_2 + v_3 \approx 34.47 - 12.89\, j \approx 36.8\, e^{j\,(-0.36)},$$



millest saab välja lugeda, et kogupinge on 36.8 volti faasiga $-0.36\, rad \approx -20.5\,°$ (nullfaasiga voolu suhtes).

◇ ◇ ◇

Näide 3.9 Vahelduvvoolu ahelas on paralleelselt ühendatud takisti (5 Ω) ja induktsioonipool (reaktiivtakistusega 3.77 Ω). Leida vooluvõrgu impedantsid, kui vooluallika pinge on 10 volti sagedusega 60 Hz (vt. [4]).



Paralleelühenduse korral liidetakse impedantside pöördväärtused,

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} = \frac{1}{5\,e^{j\,0}} + \frac{1}{3.77\,e^{j\,\frac{\pi}{2}}} = 0.200 - 0.265\,j \approx 0.332\,e^{j\,(-0.92)},$$

millest

$$Z = 3.01\,e^{j\,0.92} \approx 1.82 + 2.39\,j,$$

kusjuures näivtakistus ja faasinihe on vastavalt

$$|Z| = \sqrt{1.82^2 + 2.39^2} \approx 3.01\,\Omega, \quad \arg(Z) = \arctan\frac{2.39}{1.82} \approx 0.92\,rad \approx 53°.$$

Paralleelühenduse korral on voolu pinge kõikjal sama, meie juhul $E = E_R = E_L = 10 + 0\,j$ volti. Arvutame voolutugevuse takistis,

$$I_R = \frac{E_R}{Z_R} = \frac{10\,e^{j\,0}}{5\,e^{j\,0}} = 2\,e^{j\,0}.$$

Takisti pinge on 10 volti, voolutugevus 2 amprit ning mõlemad "lained" asuvad samas faasis. Arvutame voolutugevuse induktsioonipoolis,

$$I_L = \frac{E_L}{Z_L} = \frac{10\,e^{j\,0}}{3.77\,e^{j\,\frac{\pi}{2}}} \approx 2.65\,e^{j\,(-\frac{\pi}{2})}.$$

Pooli pinge on 10 volti, voolutugevus 2.65 amprit ning voolutugevusega seotud "laine" faasinihe on $-90°$. Paralleelühenduse korral voolutugevused summeeritakse, seega voolutugevus kokku on

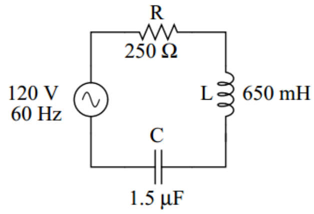
$$I = I_R + I_L = 2 - 2.65\,j \approx 3.32\,e^{j\,(-0.92)}.$$

Teeme kokkuvõtva tabeli:

	takisti (R)	induktor (L)	kokku
pinge E	$10 + 0\,j$	$10 + 0\,j$	$10 + 0\,j$
	$10\,V$, $0°$	$10\,V$, $0°$	$10\,V$, $0°$
tugevus I	$2 + 0\,j$	$0 - 2.65\,j$	$2 - 2.65\,j$
	$2\,A$, $0°$	$2.65\,A$, $-90°$	$3.32\,A$, $-53°$
impedants Z	$5 + 0\,j$	$0 + 3.77\,j$	$1.82 + 2.39\,j$
	$5\,\Omega$, $0°$	$3.77\,\Omega$, $90°$	$3.01\,\Omega$, $53°$

◇ ◇ ◇

Näide 3.10 Olgu meil vahelduvvoolu ahelas antud jadaühenduses takisti (250 oomi), induktsioonipool (induktiivsusega 650 millihenrit) ja kondensaator (mahtuvusega 1.5 mikrofaradit). Leida vooluvõrgu impedantsid, kui vooluallika pinge on 120 volti sagedusega 60 hertsi (vt. [4]).



Pooli takistus on defineeritud valemiga $|X_L| = 2\,\pi\,\omega\,L$, kus ω on sagedus ja L induktiivsus. Seega

$$|X_L| = 2\,\pi \cdot 60 \cdot 650 \cdot 10^{-3} \approx 245\,\Omega.$$

Kondensaatori takistus on defineeritud valemiga $|X_C| = \frac{1}{2\,\pi\,\omega\,C}$, kus ω on sagedus ja C mahtuvus. Seega

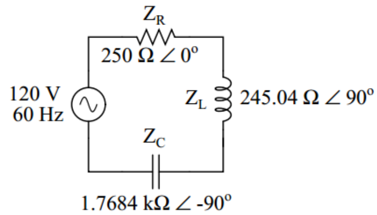
$$|X_C| = \frac{1}{2\,\pi\,60\,1.5 \cdot 10^{-6}} \approx 1768\,\Omega = 1.768\,k\Omega.$$

Ideaalse takisti impedantsi faasinihe on $0\,°$,

$$R = 250 + 0\,j = 250\,e^{j\,0}.$$

Ideaalse induktsioonipooli impedantsi faasinihe on $90\,°$,

$$X_L = 0 + 245\,j = 245\,e^{j\,\frac{\pi}{2}}.$$



Ideaalse kondensaatori impedantsi faasinihe on $-90\,°$,

$$X_C = 0 - 1768\,j = 1768\,e^{j\,(-\frac{\pi}{2})}.$$

Jadaühenduse korral impedantsid liidetakse,

$$Z = R + X_L + X_C = 250 - 1523\,j = 1543\,e^{j\,(-1.41)},$$

millest saame näivtakistuse ja faasinihke:

$$|Z| = \sqrt{250^2 + 1523^2} \approx 1543\,\Omega, \quad \arg(Z) = -\arctan\frac{1523}{250} \approx -1.41\,rad \approx -81°.$$

Üldistatud Ohm'i seadusest saame kogu vooluvõrgu voolutugevuse,

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{120 + 0\,j}{250 - 1523\,j} = \frac{120\,e^{j\,0}}{1543\,e^{j\,(-1.41)}} \approx 77.8 \cdot 10^{-3}\,e^{j\,1.41}.$$

Saime, et voolutugevus on 77.8 milliamprit ja vastav "laine" on vooluallika lainest ees 81°.

Arvutame üldistatud Ohm'i seaduse põhjal pinge takistis, induktoris ja kondensaatoris,

$$\begin{aligned}
E_R &= I_R \cdot Z_R &&= 77.8 \cdot 10^{-3}\,e^{j\,1.41} \cdot 250\,e^{j\,0} &&\approx 19.45\,e^{j\,1.41} = 19.45\,e^{j\,81°},\\
E_L &= I_L \cdot Z_L &&= 77.8 \cdot 10^{-3}\,e^{j\,1.41} \cdot 245\,e^{j\,\frac{\pi}{2}} &&\approx 19.06\,e^{j\,2.98} = 19.06\,e^{j\,171°},\\
E_C &= I_C \cdot Z_C &&= 77.8 \cdot 10^{-3}\,e^{j\,1.41} \cdot 1768\,e^{j\,(-\frac{\pi}{2})} &&\approx 137.55\,e^{j\,(-0.16)}\\
& && &&= 137.55\,e^{j\,(-9°)}.
\end{aligned}$$

Teeme kokkuvõtva tabeli:

	takisti (R)	induktor (L)	kondensaator (C)	kokku
E	$3.11 + 19.20\,j$	$-18.81 + 3.07\,j$	$135.79 - 21.91\,j$	$120 + 0\,j$
	$19.45\,V\ ,\ 81^\circ$	$19.06\,V\ ,\ 171^\circ$	$137.55\,V\ ,\ -9^\circ$	$120\,V\ ,\ 0^\circ$
I	$0.012 + 0.077\,j$	$0.012 + 0.077\,j$	$0.012 + 0.077\,j$	$0.012 + 0.077\,j$
	$77.8\,mA\ ,\ 81^\circ$	$77.8\,mA\ ,\ 81^\circ$	$77.8\,mA\ ,\ 81^\circ$	$77.8\,mA\ ,\ 81^\circ$
Z	$250 + 0\,j$	$0 + 245\,j$	0-1768 j	$250 - 1523\,j$
	$250\,\Omega\ ,\ 0^\circ$	$245\,\Omega\ ,\ 90^\circ$	$1768\,\Omega\ ,\ -90^\circ$	$1543\,\Omega\ ,\ -81^\circ$

Paneme tähele, et kuigi vooluallika pinge on 120 volti, siis kondensaatoris on see koguni 137.55 volti!

◇ ◇ ◇

Viited

[1] R. J. Gillings. The So-Called Euler-Diderot Incident. Am. Math. Mont. vol. 61 (2), 77-80, 1954.

[2] J. Grimbleby. Systems and Circuits (loengukonspekt). University of Reading.

[3] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross, 1997-98.

[4] T. R. Kuphaldt. Lessons In Electric Circuits, Volume II - AC. 2007.

[5] C. A. Pickover. The Math Book. Sterling, New York, 2009.

[6] S. W. Smith. The Scientist and Engineer Guide to Digital Signal Processing. Newnes, 2002.

[7] V. Soomer. Kõrgem matemaatika (loengukonspekt).

[8] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.