Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

4 Funktsioonid

Sisukord

Kontrolltöö teemad

1. Funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond ning nende leidmine.
2. Paarisfunktsioon ja paaritu funktsioon.
3. Põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud (v.a. $\sec(x)$, $\csc(x)$ ja nende pöördfunktsioonid).
4. Logaritmfunktsiooni lihtsamad omadused.
5. Hüperboolne siinus ja koosinus (teisi hüperboolseid funktsioone me ei kasuta).

Eksamiteemad

1. Funktsiooni mõiste.
2. Funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond.
3. Paarisfunktsioon ja paaritu funktsioon.
4. Üksühene funktsioon, pealekujutus, liitfunktsioon, pöördfunktsioon.
5. Põhilised elementaarfunktsioonid (mõiste).
6. Elementaarfunktsioonid (mõiste).

4.1 Funktsiooni mõiste

Funktsioonid on matemaatilise analüüsi põhilised uurimisobjektid. Matemaatilise analüüsi (ka *Calculus*) loojateks peetakse inglise füüsikut (sama hästi matemaatikut) Isaac Newton'it (1642 - 1727) ja saksa matemaatik-filosoofi Gottfried Wilhelm von Leibniz'i (1646 - 1716). Oma kursuses vaatleme enamasti reaalarvulisi funktsioone, mingid teised funktsioonid saab defineerida analoogiliselt.

„Sinu eksamihinne on funktsioon ajast, mida sa panustad õpingutesse.“

Olgu antud mittetühi hulk $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$.

Oma olemuselt on funktsioon mingi “reegel” (reeglite kogu, algoritm, protsess), mis igale sisendväärtusele leiab mingi väljundväärtuse. Matemaatikas formuleeritakse funktsiooni mõiste veidi rangemalt.

Definitsioon 4.1

Kui igale arvule $x \in X$ on vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv y, siis öeldakse, et hulgal X on defineeritud funktsioon f ehk

$$y = f(x).$$

Elementi x nimetatakse ka funktsiooni f argumendiks ja elementi y elemendi x kujutiseks, elementi x ka elemendi y originaaliks.

Kui läbi punkti x tõmmata vertikaalne sirge, siis joon $y = f(x)$ kujutab endast funktsiooni ainult siis, kui tõmmatud sirge lõikab joont $y = f(x)$ ainult ühes punktis.

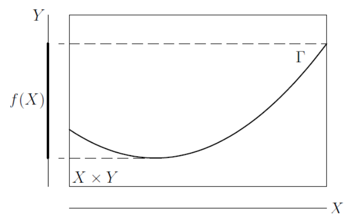
Näiteks, seos $u = \pm\sqrt{|v|}$ ei kujuta endast funktsiooni, kuna argumendile v on vastavusse seatud rohkem kui üks väärtus u. Kui mingile argumendile seatakse vastavusse rohkem väärtusi, siis räägitakse “seosest”, kuid mitte funktsioonist. Küll on aga funktsiooniks $u = \sqrt{v}$, $v \in [0, \infty)$.

Definitsioon 4.2

Kõikide elementide hulka $x \in X$, mille puhul funktsioon $y = f(x)$ on määratud, nimetakse funktsiooni f määramispiirkonnaks. Funktsiooni f kõikide väärtuste hulka

$$Y = \{y \,|\, y = f(x),\, x \in X\}$$

nimetatakse funktsiooni f muutumispiirkonnaks ehk väärtuste hulgaks.



(Allikas: [1])

Märkus 4.1

Funktsiooni f saab defineerida ka (loomulikust) määramispiirkonnast X väiksemal hulgal $X_0 \subset X$. Sellisel juhul on väga oluline seda mainida.

Määramispiirkonna piiramine võib oluliselt muuta funktsiooni omadusi, kusjuures tulemuseks võib olla mingi teine funktsioon. Näiteks, sirge $y = x - 1$ väärtused on rangelt positiivsed hulgal $X = (1, \infty)$, kuid ei ole seda hulgal $X = (-\infty, 1]$.

Funktsiooni kirjeldamiseks kasutatakse tihti kuju

$$f : X \to Y.$$

Definitsioon 4.3

Funktsiooni f graafikuks nimetatakse xy-tasandi punktide hulka

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \,|\, y = f(x),\, x \in X\}.$$

Funktsiooni põhilised esitusviisid on järgmised:

1. analüütiline esitus valemi(te) abil;
2. numbriline esitus tabeli abil;
3. geomeetriline esitus graafiku abil.

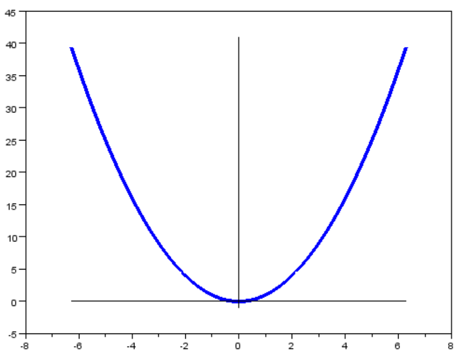
Näide 4.1 Võtame näiteks funktsiooni $y = f(x)$ (esitus valemina):

$$y = x^2, \quad f : \mathbb{R} \to [0, \infty).$$

Esitus tabelina (kasutatakse väga palju ligikaudses arvutamises, statistikas, andmetöötluses):

x	-10	-5	-1	0	0.1	6	20
y	100	25	1	0	0.01	36	400

Esitus graafikuna:



◇ ◇ ◇

Märkus 4.2
Kui funktsiooni $y = f(x)$ korral on antud vaid teda määrav eeskiri, määramispiirkond X pole aga fikseeritud, siis loetakse määramispiirkonnaks nende argumendi väärtuste x hulk, mille korral funktsiooni määrav eeskiri omab mõtet (nn. loomulik määramispiirkond).

Mainimata määramis- või muutumispiirkonda võib kaasa tuua intsidendi Berkeley matemaatikainstituudi seinale kritseldatud grafiti näol:

$\sqrt{3} > 2$ piisavalt “suure” 3 korral,

kus siis number kolmele on vägivaldselt antud sõltuva muutuja roll ($y = \sqrt{x}$).

Näiteks on funktsiooni $y = \sqrt{x^2 - 4}$ määramispiirkond

$$X = (-\infty, -2] \cup [2, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-2, 2).$$

Funktsioon võib olla antud ka “ilmutamata” kujul nagu näiteks ringjoon (keskpunktiga $(0, 1)$):

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Ilmutatud kujul saaksime kaks eraldiseisvat funktsiooni: $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ ja $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$, sealjuures $|x| \le 1$. Ilmutamata kujul antud funktsioon $F(x, y) = 0$ ei pruugi ühemuutujafunktsiooni üheselt määrata.

Definitsioon 4.4

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatake paarisfunktsiooniks määramispiirkonnas X, kui

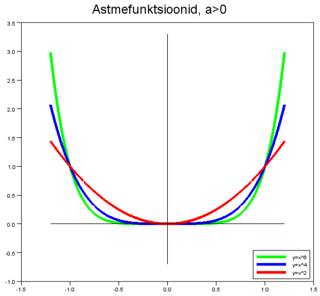
$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatake paarituks funktsiooniks, kui

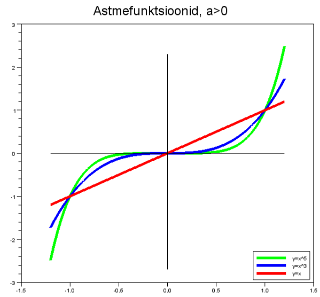
$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in X.$$

Siinus on paaritu ja koosinus paaris, $y = x^2$ on paaris, $y = x$ on paaritu.

Paaris



Paaritud

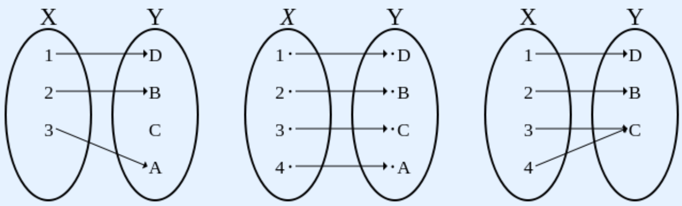


4.2 Üksühesus ja pealekujutus

Definitsioon 4.5

Funktsiooni $f : X \to Y$ nimetatakse üksüheseks (ka injektiivseks) funktsiooniks, kui määramispiirkonna iga kahe erineva elemendi $x_1 \neq x_2$ korral

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

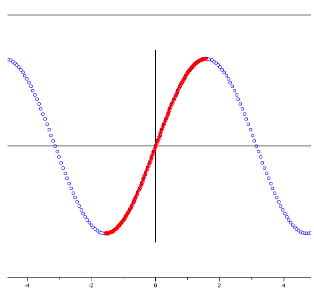


1) üksühene 2) üksühene 3) ei ole üksühene funktsioon (Allikas: Wikipedia)

Funktsiooni üksühesuse omadus on matemaatikas väga oluline.

Funktsiooni üksühesus tähendab veel seda, et kui $f(x_1) = f(x_2)$ siis peab kehtima elementide võrdus $x_1 = x_2$, samuti ka seda, et ühelgi elemendil hulgast Y ei ole üle ühe originaali hulgas X.

Siinusfunktsioon $y = \sin(x)$ on näiteks üksühene osalõigul $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kuid ei ole üksühene tervel reaalteljel $x \in \mathbb{R}$. Samuti ei ole teised perioodilised funktsioonid üksühesed üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$.

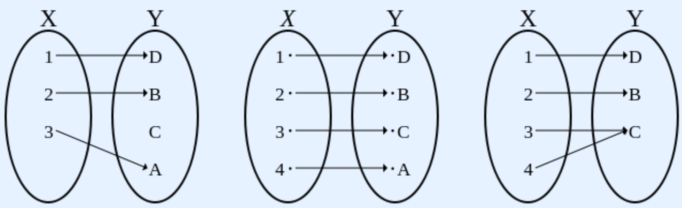


Näide 4.2 Konstante funktsioon $y(x) = 1$ on üksühene ühepunktisel hulgal $x \in \{a\}$ ja ei ole üksühene mingil suuremal hulgal. Lineaarne funktsioon $y = a\,x + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ on alati üksühene.

$\diamond \diamond \diamond$

Definitsioon 4.6

Funktsiooni $f : X \to Y$ nimetatakse pealekujutuseks (ka sürjektiivseks funktsiooniks), kui $f(X) = Y$, s.t. iga elemendi $y \in Y$ korral leidub originaal $x \in X$ nii, et $y = f(x)$.



1) ei ole pealekujutus 2) pealekujutus 3) pealekujutus (Allikas: Wikipedia)

Näide 4.3 Konstante funktsioon $y(x) = 1$ on pealekujutus, $f : \mathbb{R} \to \{1\}$, kuid ei ole pealekujutus hulkadel $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

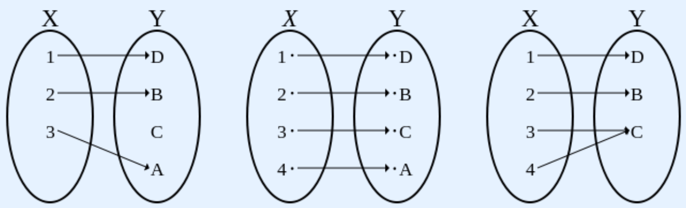
Lineaarne funktsioon $y = a\,x + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ on pealekujutus, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

◇ ◇ ◇

Siinusfunktsioon $y = \sin(x)$ on pealekujutus hulkadel $sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, kuid mitte hulkadel $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

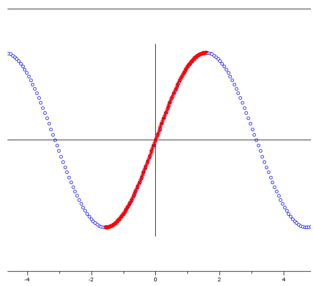
Definitsioon 4.7

Funktsiooni $f : X \to Y$ nimetatakse üksüheseks pealekujutuseks (ka bijektiivseks funktsiooniks), kui see on injektiivne ja sürjektiivne ehk kui igal elemendil hulgast Y leidub parajasti üks originaal.



1) ei ole bijektiivne 2) bijektiivne 3) ei ole bijektiivne (Allikas: Wikipedia)

Siinusfunktsioon $sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ on üksühene pealekujutus, kuid $sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ei ole.



4.3 Liitfunktsioon

Olgu antud funktsioon $y = f(u)$, mille määramispiirkond on Z, muutumispiirkond on Y ning funktsioon $u = g(x)$, mille määramispiirkond on X ja muutumispiirkond $U \subset Z$.

Definitsioon 4.8

Funktsiooni F, kus $y = F(x) = f(g(x))$, nimetatakse funktsioonide f ja g liitfunktsiooniks. Funktsioone f ja g nimetatakse liitfunktsiooni F komponentideks (ka koostisosadeks). Funktsioonide f ja g liitfunktsiooni tähistatakse ka sümboliga $f \circ g$, s.t. kirjutame $(f \circ g)(x)$.

Näide 4.4 Vaatleme funktsioone

$$y = x + 1, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$y = x^2, \quad g : \mathbb{R} \to [0, \infty).$$

Siis saame näiteks moodustada liitfunktsioonid

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + 1, \quad F : \mathbb{R} \to [1, \infty),$$

ja

$$G(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2 = x^2 + 2\,x + 1, \quad G : \mathbb{R} \to [0, \infty).$$

◇ ◇ ◇

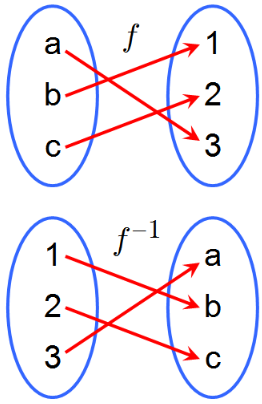
4.4 Pöördfunktsioon

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, mille määramispiirkond on X ja muutumispiirkond on Y ehk ka $f : X \to Y$.

Definitsioon 4.9

Kui iga $y \in Y$ korral leidub ainus $x \in X$, mille korral $y = f(x)$, siis vastavus $y \leftrightarrow x$ määrab funktsiooni $x = g(y)$, mida nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsiooniks ja tähistatakse $g = f^{-1}$,

$$f^{-1} : Y \to X.$$



Allikas: Wikipedia

Märkus 4.3

Funktsioon f on pööratav parajasti siis, kui ta on üksühene pealekujutus (s.t. bijektiivne).

Märkus 4.4

Funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsiooni $x = f^{-1}(y)$ leidmiseks tuleb ([3])

1. avaldada võrrandist $y = f(x)$ muutuja x muutuja y kaudu;
2. vahetada tähised x ja y.

Funktsiooni pööratavus on eriti oluline võrrandite lahendamise uurimisel.

Näide 4.5 Seame Celsius'e kraadidele vastavusse Fahrenheit'i kraadid

$$f(x) = \frac{9}{5} \cdot x + 32.$$

Matemaatiliselt saab selle funktsiooni defineerida tervel reaalteljel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Selle järgi näiteks $30°C = f(30) = \frac{9}{5} \cdot 30 + 32 = 86°F$. Funktsiooni f pöördfunktsiooniks osutub

$$f^{-1}(y) = \frac{5}{9} \cdot (y - 32),$$

mis tegutseb samuti ruumides $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tõepoolest,

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = \frac{5}{9} \cdot (f(x) - 32) = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{9}{5} \cdot x + 32 - 32\right) = x, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

ja

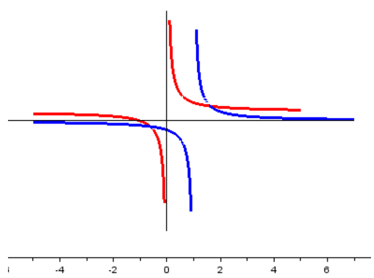
$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = \frac{9}{5} \cdot f^{-1}(y) + 32 = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot (y - 32) + 32 = y, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Näiteks, $86°F = f^{-1}(86) = \frac{5}{9} \cdot (86 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 54°C = 30°C$.

◇ ◇ ◇

Näide 4.6 Leida funktsiooni $y = \frac{x+1}{x}$ pöördfunktsioon. Esiteks märgime, et $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Nõudes, et $x \neq 0$, avaldame

$$xy - x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{y - 1}.$$



Seega pöördfunktsioon on $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, kus $y = \frac{1}{x-1}$.

◇ ◇ ◇

Näide 4.7 Funktsioon $f(x) = x^2$ võib tegutseda ruumides $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Tema pöördfunktsiooniks sobib

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in [0, \infty),$$

siinjuures $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Paneme tähele, et reaalarvuline funktsioon f on pööratav ainult hulgal $x \in [0, \infty)$, kuna iga $y > 0$ korral leidub mitu reaalarvu, $x, -x \in \mathbb{R}$, nii, et kehtib $y = f(\pm x) = (\pm x)^2$.

Kokkuvõtteks võime öelda, et reaalarvuline funktsioon $f(x) = x^2$ on pööratav hulgal $X \subset [0, \infty)$, vastasel korral mitte. Matemaatiliselt võib öelda, et $y = x^2$ ei ole injektiivne (üksühene) hulgal $\mathbb{R}$ ja seega ei ole bijektiivne ja järelikult ei ole ka pööratav. Samas, $y = x^2$ on üksühene hulgal $[0, \infty)$ ja nagu öeldud, ka pööratav.

$\diamond \diamond \diamond$

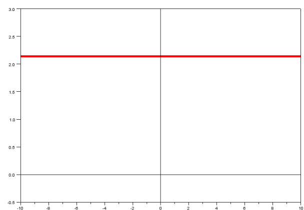
4.5 Põhilised elementaarfunktsioonid

Matemaatilises analüüsis enim uuritud ja kõige sagedamini esinevad funktsioonid on elementaarfunktsioonid.

Definitsioon 4.10

Põhilisteks elementaarfunktsioonideks nimetatakse järgmisi funktsioone:

1. konstantne funktsioon $y = c$;
2. astmefunktsioon $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$;
3. eksponentfunktsioon $y = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$;
4. logaritmfunktsioon $y = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$;
5. trigonomeetrilised funktsioonid
   $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$;
6. arkusfunktsioonid
   $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.



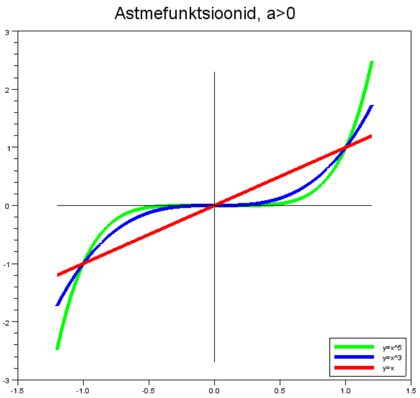
- **Konstantne funktsioon** $y = c$ tegutseb hulkadel $f : \mathbb{R} \to \{c\}$. On paarisfunktsioon, pealekujutus, ei ole üksühene määramispiirkonnas $\mathbb{R}$.

- **Astmefunktsioon** $y = x^a$**,** $a \in \mathbb{R}$.

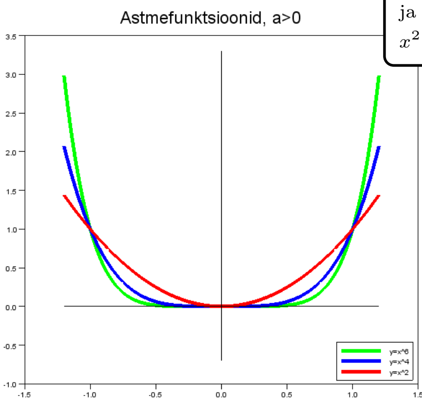
  Näiteks, $y = x$ ja $y = x^3$ on bijektiivsed paaritud funktsioonid, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. See-eest $y = x^2$ ja $y = x^4$ on paarisfunktsioonid, $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, ei ole üksühesed.

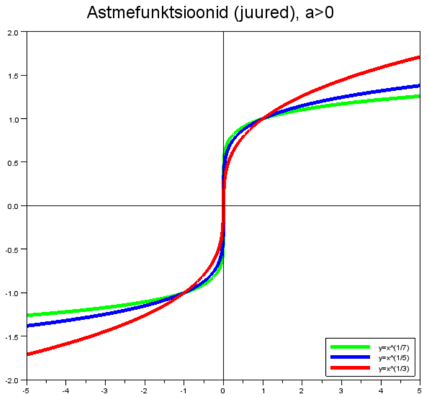
  Kui $a \in (0, 1)$, siis saame nn. juurfunktsioonid, $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ jne. Kui $a < 0$, siis jääb määramispiirkonnast kindlasti välja punkt $x = 0$, $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$.

Astmefunktsioonid on väga olulised funktsioonid teiste funktsioonide lähendamisel, ligikaudses arvutamises, arvutitega modelleerimisel jne.

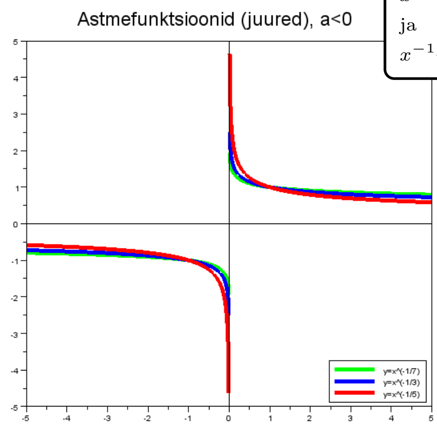


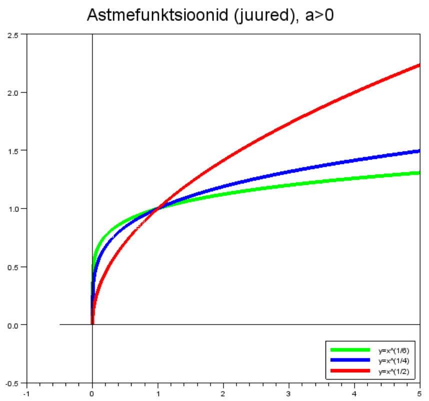
x, x^3, x^5
ja
x^2, x^4, x^6



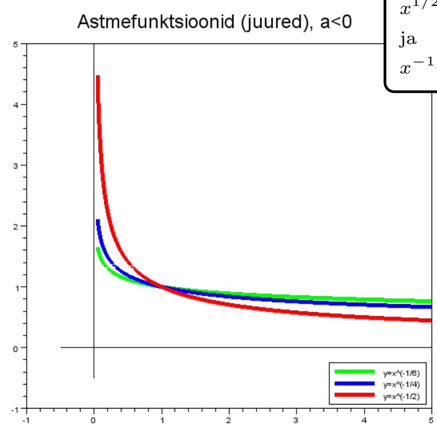


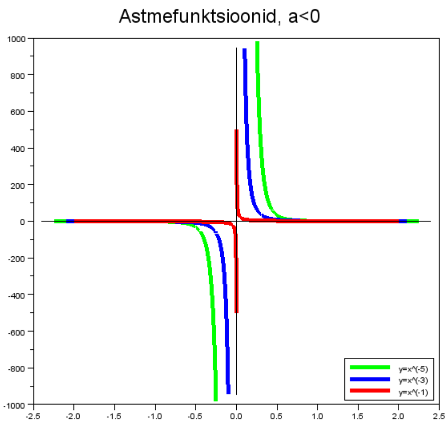
$x^{1/3}$, $x^{1/5}$, $x^{1/7}$
ja
$x^{-1/3}$, $x^{-1/5}$, $x^{-1/7}$



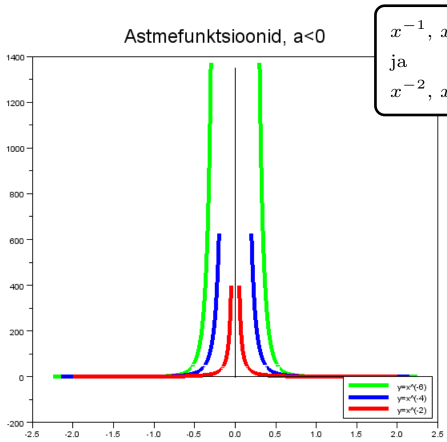


$x^{1/2}$, $x^{1/4}$, $x^{1/6}$
ja
$x^{-1/2}$, $x^{-1/4}$, $x^{-1/6}$





x^{-1}, x^{-3}, x^{-5}
ja
x^{-2}, x^{-4}, x^{-6}

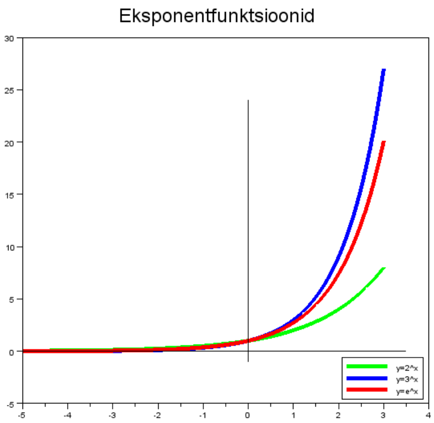


- **Eksponentfunktsioon** $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Kõige populaarsem nendest on $y = e^x$, laialt levinud on ka funktsioon kahe astmetest, $y = 2^x$. Siinjuures $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, f on bijektiivne. Eksponentfunktsiooni $y = e^x$ kirjutatakse ka kujul $y = \exp(x)$.

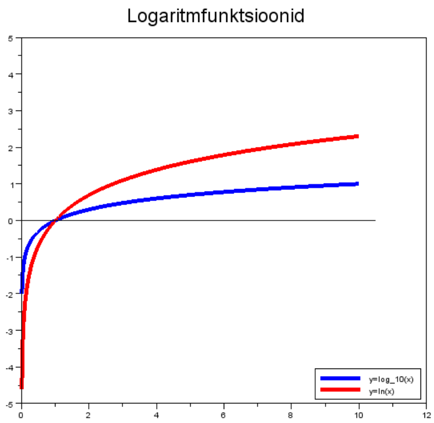
Eksponentfunktsioon a^x kasvab oluliselt kiiremini kui mistahes astmefunktsioon x^b.

Tihti on tavaks $y = e^x$ "käsitleda" kui kaht erinevat funktsiooni: $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ $(x > 0)$ kuna $y = e^x$ väärtused x suurenedes kasvavad väga kiiresti (eksponentsiaalne kasv) ja $y = e^{-x}$ väärtused x suurenedes kahanevad väga kiiresti (eksponentsiaalne kahanemine). Mingis mõttes $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ kirjeldavad väga oluliselt erinevaid protsesse.

Eksponentfunktsioonid $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ $(x > 0)$ on väga olulisel kohal loodusprotsesside kirjeldamisel (näiteks rahvastiku (populatsiooni) eksponentsiaalne kasv või kahanemine), intresside arvutamisel finantsmatemaatikas jne.



2^x, 3^x, e^x



$\log_{10}(x)$, $\ln(x)$

- **Logaritmfunktsioon** $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Kõige populaarsem nendest on naturaallogaritm $y = \ln x$ (logaritmi alus on Euler'i arv e, $y = \log_e x$), laialt levinud on ka kümnendlogaritm $y = \log_{10} x$.

Siinjuures $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ on bijektiivne ja $y = \log_a(x)$ pöördfunktsiooniks f^{-1} on vastav eksponentfunktsioon $y = a^x$.

Vastupidiselt kiirele eksponentsiaale kasvule ja kahanemisele, on logaritmiline kasv ja kahanemine väga aeglased. Logaritmfunktsioonid on samuti väga olulised reaalelu protsesside kirjeldamisel.

Logaritmfunktsioonil on järgmised tähtsamad omadused:

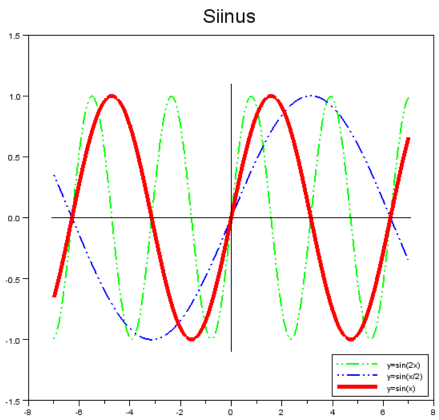
$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y), \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y),$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \quad \log(x^a) = a \cdot \log(x), \quad x = e^{\ln(x)},$$

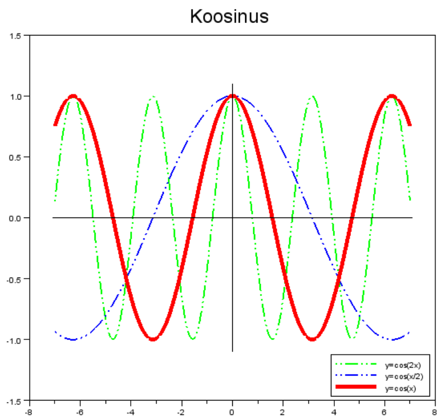
$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1, \quad \ln(e^{-1}) = -1.$$

Kui tekstis ei ole midagi muud täpsustatud, siis sageli võidakse kirjutise $\log x$ all mõelda ka naturaallogaritmi $\ln x$. See on eriti levinud teaduskirjanduses. Paneme tähele, et erineva alusega logaritmid erinevad üksteisest vaid konstandi kordsuse poolest.

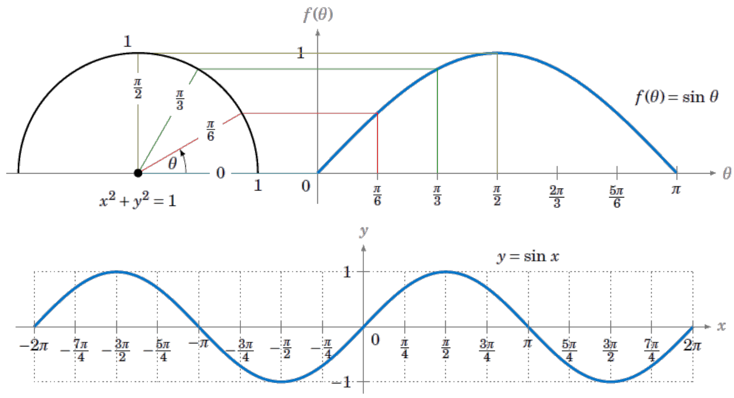
- **Trigonomeetrilised funktsioonid** ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$).



$\sin(2x)$, $\sin(x/2)$, $\sin(x)$



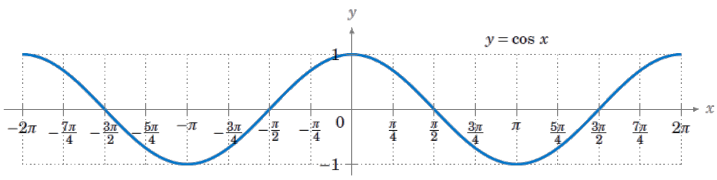
$\cos(2x)$, $\cos(x/2)$, $\cos(x)$



(Allikas: http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/)

Siinusfunktsioon $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

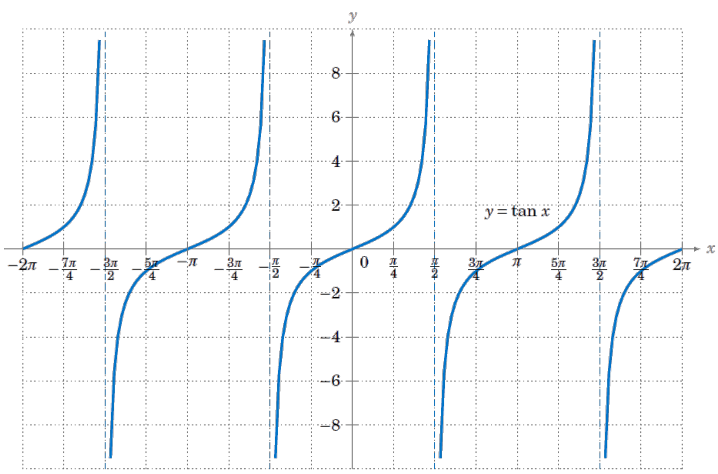
Funktsioon $\sin : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ on üksühene.



(Allikas: http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/)

Koosinusfunktsioon $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ on paarisfunktsioon, ei ole üksühene.

Funktsioon $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ on üksühene.



(Allikas: http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/)

Tangensfunktsioon $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

Funktsioon $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ on üksühene.

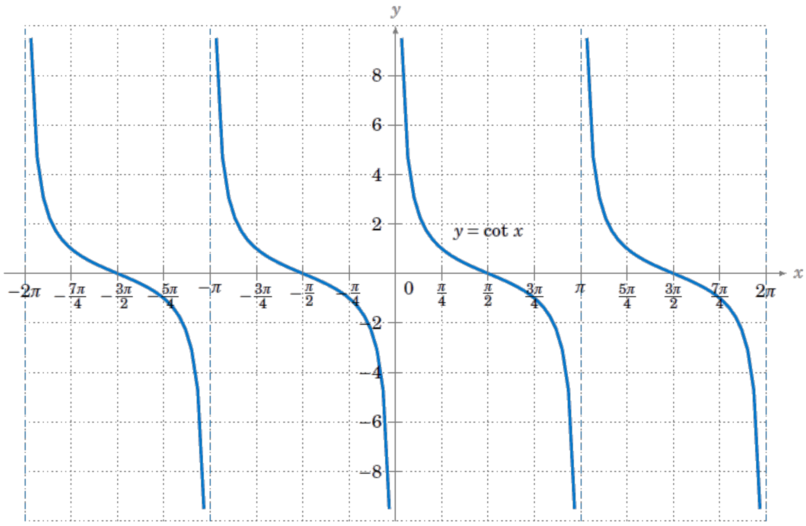
Tangensi saab alati tuletada siinuse ja koosinuse kaudu:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Märkus 4.5

Järgnevad funktsioonid $\cot(x)$, $\sec(x)$, $\csc(x)$ on tuletatavad eelmiste kaudu ja ilma nendeta saab väga hästi hakkama. Mõnikord on nad siiski abiks.



(Allikas: http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/)

Kootangensfunktsioon $\cot : \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

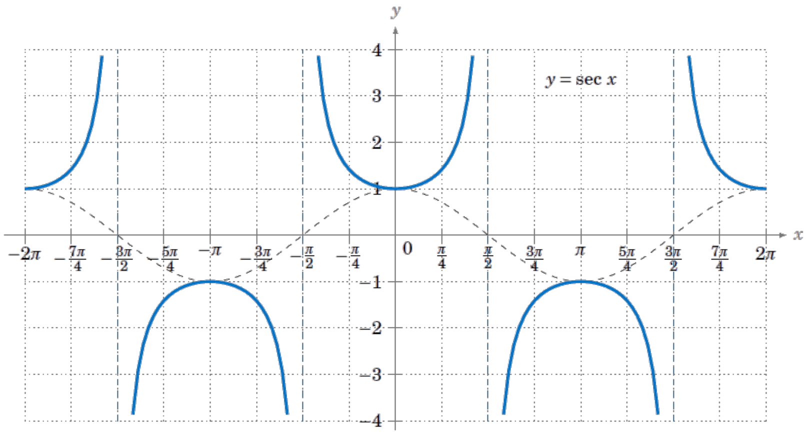
Funktsioon $\cot : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ on üksühene.

Kootangensi saab alati tuletada tangensist või siinuse ja koosinuse kaudu:

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

$$\cot(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$x \neq \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.



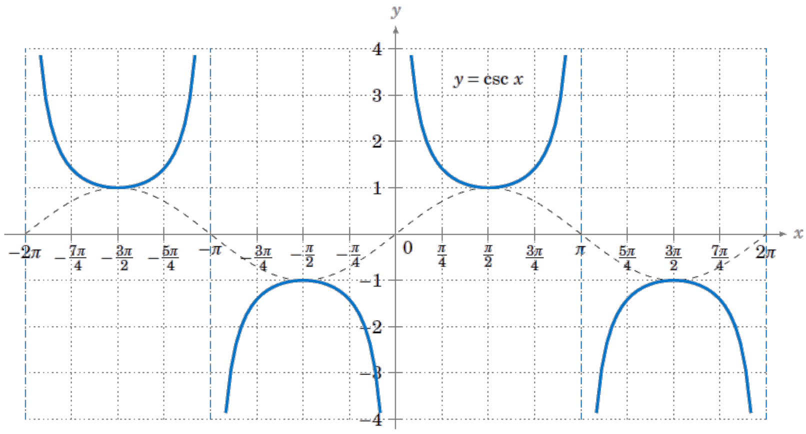
(Allikas: http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/)

Seekansfunktsioon $\sec : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ on paarisfunktsioon, ei ole üksühene.

Seekans on koosinuse jagatis,

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)},$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.



(Allikas: http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/)

Kooseekansfunktsioon $\csc : \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

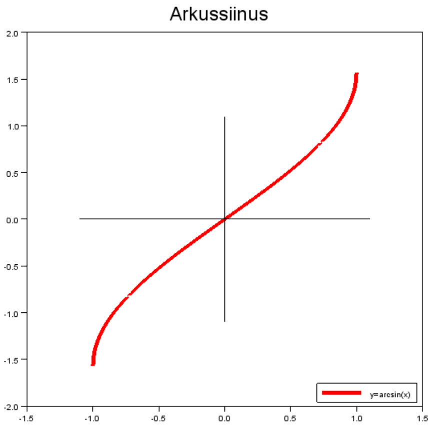
Kooseekans on siinuse jagatis,

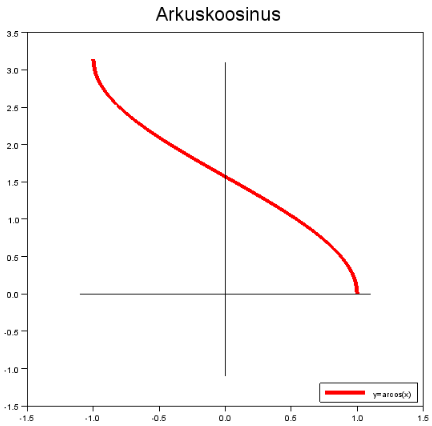
$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)},$$

$x \neq \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

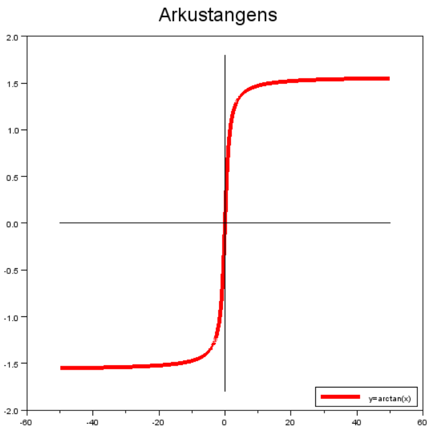
- **Arkusfunktsioonid** $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ on vastavate trigonomeetriliste funktsioonide $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ pöördfunktsioonid (sobivas osalõigus).

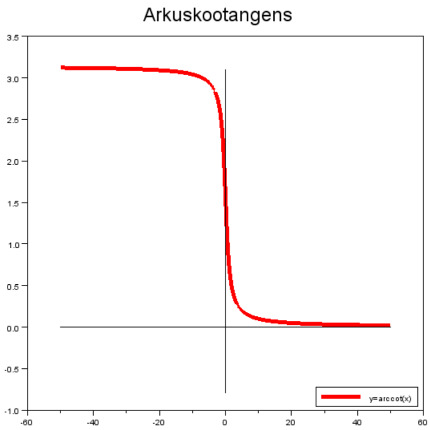
Arkussiinus $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on paaritu, üksühene pealekujutus.
Arkuskoosinus $\arcsin : [-1,1] \to [0,\pi]$ on üksühene pealekujutus.



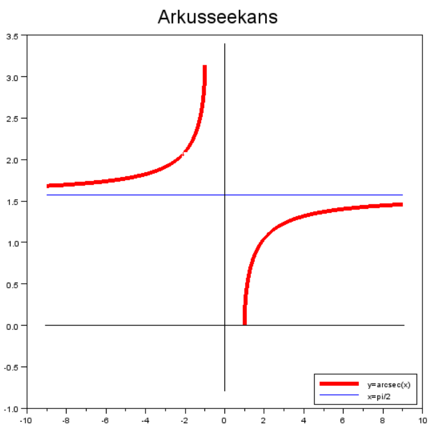


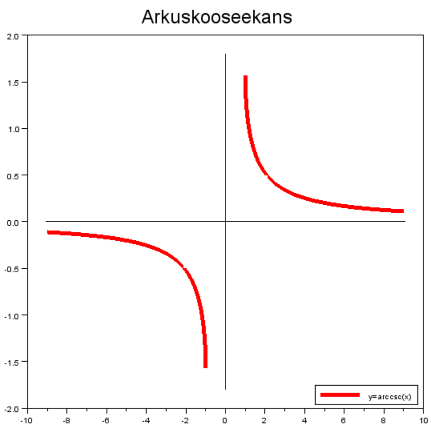
Arkustangens $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ on paaritu, üksühene pealekujutus.
Arkuskootangens $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ on üksühene pealekujutus.





Arkusseekans $\operatorname{arcsec} : \mathbb{R} \setminus (-1,1) \to [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ on üksühene pealekujutus.
Arkuskooseekans $\operatorname{arccsc} : \mathbb{R} \setminus (-1,1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ on paaritu üksühene pealekujutus.





Märkus 4.6

Kirjanduses kasutatakse arkusfunktsioonide tähistamiseks ka kirjutusviisi $\sin^{-1}(x)$, $\cos^{-1}(x)$, $\tan^{-1}(x)$ ja $\cot^{-1}(x)$. Viimane on tulnud $f(x)$ pöördfunktsiooni $f^{-1}(x)$ tähistamisest. Seda ei tohi segamini ajada argumendi x pöördväärtusega $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Funktsioonide korral kirjutusviis $f^{-1}(x)$ **ei tähenda** avaldist $\frac{1}{f(x)}$, vaid ikkagi pöördfunktsiooni. Segaduse vältimiseks on kasulikum kasutada nimetusi $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ või siis $y = \operatorname{asin} x$, $y = \operatorname{acos} x$, $y = \operatorname{atan} x$, $y = \operatorname{acot} x$.

Märkus 4.7

Mõnikord läheb vaja veel järgmisi seoseid:

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arcsec}(x) + \operatorname{arccsc}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

4.6 Elementaarfunktsioonid

Definitsioon 4.11

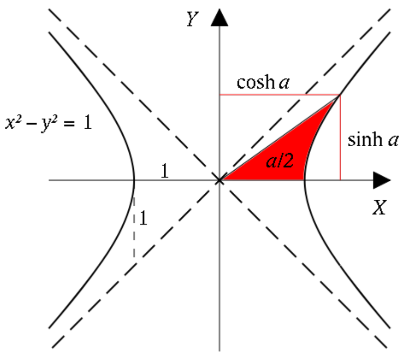
Elementaarfunktsioonideks nimetatakse funktsioone, mis on saadavad põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel.

Näiteks on $f(x) = e^{e^{\sin\left(1+\sqrt{\log(4+x^2)}\right)}}$ elementaarfunktsioon. Mitteelementaarfunktsioon on aga näiteks veafunktsioon $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\, dt$.

Mitteelementaarfunktsioonide näiteid leiab hulganisti lõpmatute ridade seas.

4.7 Hüperboolsed funktsioonid *

Trigonomeetrilised funktsioonid $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ on seotud ühikringjoonega $x^2 + y^2 = 1$. Analoogilised funktsioonid saab esitada hüperbooli $x^2 - y^2 = 1$ kohta.

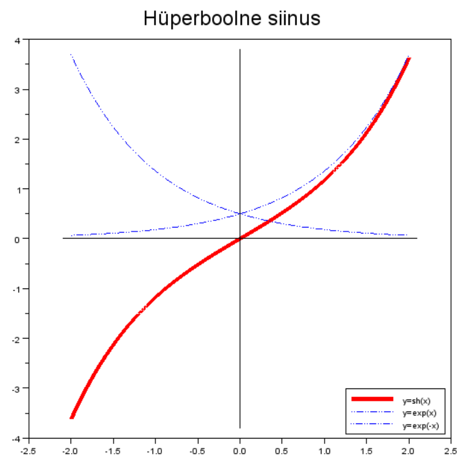


(Allikas: Wikipedia)

Ühikringjoone punktid saab esitada koordinaatidega $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$. Analoogiliselt saab esitada punktid hüperbooli $x^2 - y^2 = 1$ peal: $(\mathrm{ch}(\varphi), \mathrm{sh}(\varphi))$, kus ch on hüperboolne koosinus ja sh on hüperboolne siinus.

Kohe näeme, et hüperboolseid funktsioone saab esitada eksponentfunktsioonide kaudu ja selles mõttes ei oleks vaja uusi tähistusi sisse tuua, kuid mõnikord teeb see meie töö oluliselt lihtsamaks.

- **Hüperboolne siinus** $\mathrm{sh}(x)$.

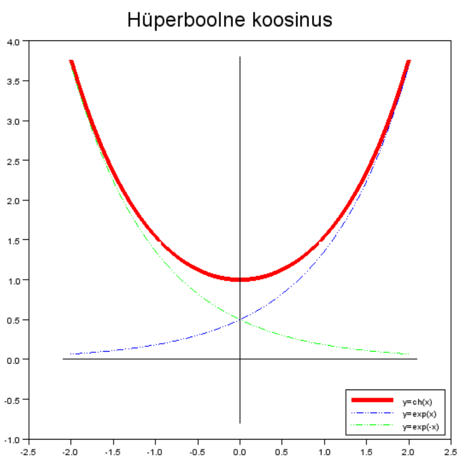


On defineeritud võrdusega

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{4.1}$$

Viimast märgitakse ka $\sinh(x)$. Hüperboolne siinus $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paaritu üksühene pealekujutus.

- **Hüperboolne koosinus** $\mathrm{ch}(x)$.



On defineeritud võrdusega

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{4.2}$$

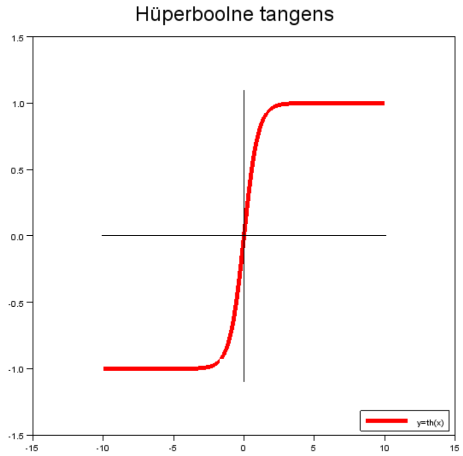
Viimast märgitakse ka $\cosh(x)$. Hüperboolne koosinus $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ paarisfunktsioon, ei ole üksühene.

Hüperboolne koosinus võib tekkida funktsioonides, mis kirjeldavad rippuvaid ahelaid, nagu näiteks ketid, elektriliinid, kaarsillad ja teised sellised objektid, mis ripuvad kahelt poolt kinnitatuna ainult oma keha raskuse mõjul. Pöörates kujundi ümber, saame analoogiliselt projekteerida kaarsildu. Vastavat objekti võib matemaatiliselt kirjeldada hüperboolse koosinusfunktsiooniga

$$f(x) = a \cdot \mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0.$$

Maailma kõrgeim monument: St. Louis Gateway Arch (192 m) (Allikas: Wikipedia)

- **Hüperboolne tangens** $\mathrm{th}(x)$.

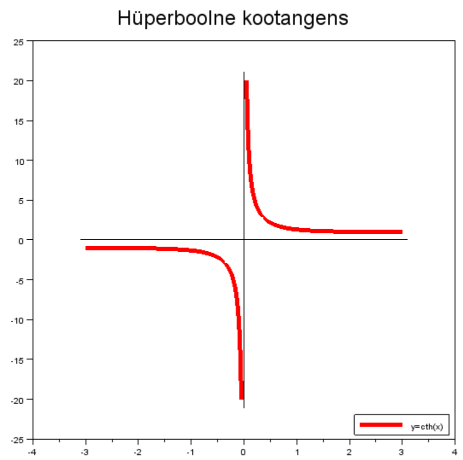


On defineeritud võrdusega

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \tag{4.3}$$

Viimast märgitakse ka $\tanh(x)$. Hüperboolne tangens $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ on paaritu üksühene pealekujutus.

- **Hüperboolne kootangens** $\mathrm{cth}(x)$.

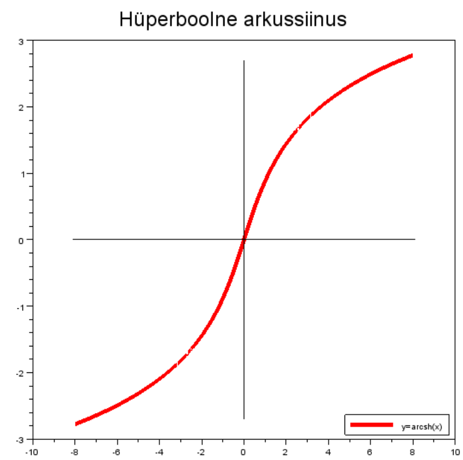


On defineeritud võrdusega

$$\mathrm{cth}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0. \tag{4.4}$$

Viimast märgitakse ka $\coth(x)$. Hüperboolne kootangens $\mathrm{cth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on paaritu üksühene pealekujutus.

- **Areasiinus** $\mathrm{arsh}(x)$ on $\mathrm{sh}(x)$ pöördfunktsioon.



On defineeritud võrdusega

$$\mathrm{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \tag{4.5}$$

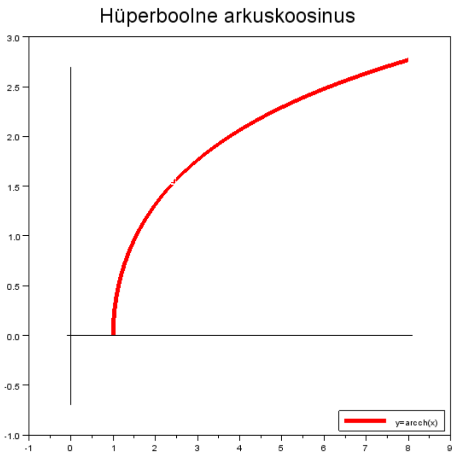
Areasiinus $\mathrm{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on üksühene pealekujutus.

- **Areakoosinus** $\operatorname{arch}(x)$ on $\operatorname{ch}(x)$ pöördfunktsioon.

On defineeritud võrdusega

$$\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \tag{4.6}$$

Areakoosinus $\operatorname{arch} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ on üksühene pealekujutus.

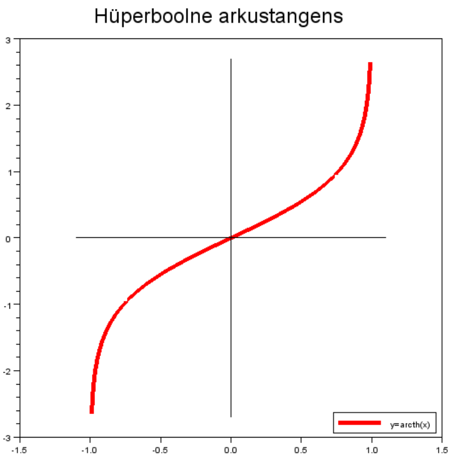


- **Areatangens** $\operatorname{arth}(x)$ on $\operatorname{th}(x)$ pöördfunktsioon.

On defineeritud võrdusega

$$\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \tag{4.7}$$

Areatangens $\operatorname{arth} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ on paaritu üksühene pealekujutus.

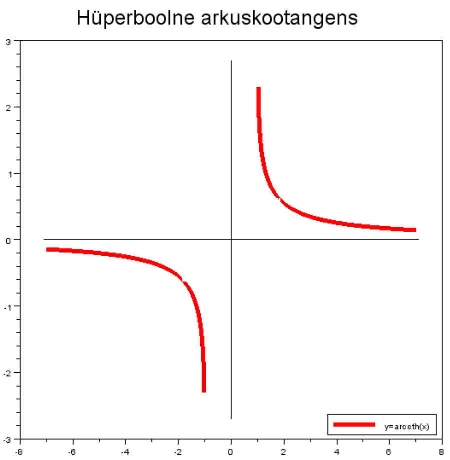


- **Areakootangens** $\operatorname{arcth}(x)$ on $\operatorname{cth}(x)$ pöördfunktsioon.

On defineeritud võrdusega

$$\operatorname{arcth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right). \tag{4.8}$$

Areakootangens $\operatorname{arcth} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R}$ on paaritu üksühene pealekujutus.



- **Hüperboolsete funktsioonide põhivalemid**:

$$\boxed{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1} \tag{4.9}$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x), \tag{4.10}$$

$$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x) = 2\operatorname{ch}^2 - 1, \tag{4.11}$$

$$\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x, \quad \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x}. \tag{4.12}$$

Viited

[1] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross, 1997-98.

[2] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[3] V. Luigelaht, E. Reiman. Matemaatika tehnikumidele. Tallinn, Valgus 1978.

[4] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.