5 Funktsiooni piirväärtus

Sisukord

Kontrolltöö teemad

1. Piirväärtuse tehetega seotud omadused.
2. Piirväärtuse arvutamine (näited 5.6 - 5.10).

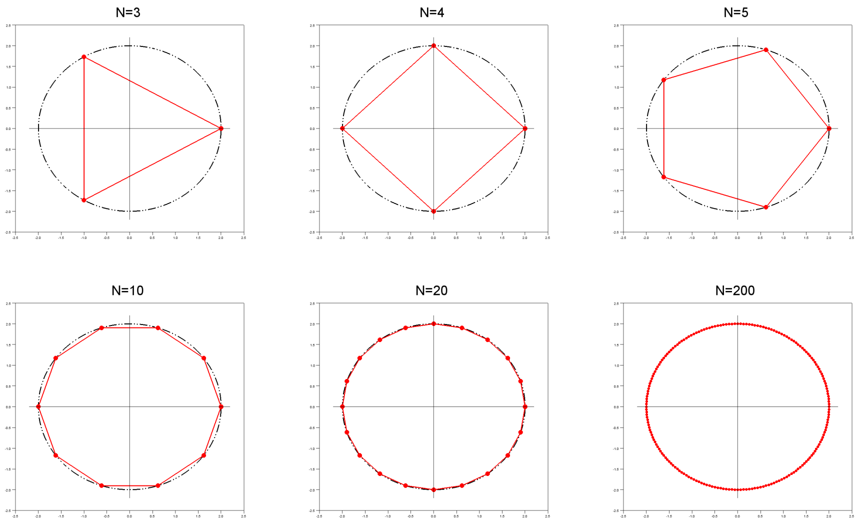
Eksamiteemad

1. Piirväärtuse intuitiivne mõiste (märkus 5.1), täpset definitsiooni ei küsita (kuid selle teadmine tuleb alati kasuks).
2. Piirväärtuse ühesus (teoreem 5.1).
3. Piirväärtus tõkestatud ja hääbuva funktsiooni korrutisest (teoreem 5.2).
4. Piirväärtuse tehetega seotud omadused (teoreem 5.3).
5. Keskmise muutuja omadus (võileiva omadus, teoreem 5.5).
6. Piirväärtus elementaarfunktsioonidest (teoreem 5.6).

5.1 Sissejuhatus

Piirväärtuse mõiste on matemaatilise analüüsi üks alustalasid ja see eristab matemaatilist analüüsi näiteks algebrast ja trigonomeetriast. Sellele mõistele baseeruvad enamus meie järgmistes loengutes vaadeldavaid mõisteid, nagu näiteks funktsiooni pidevus, tuletis, keha hetkkiirus, integraal, summa koondumine.

Vaatleme näiteks võrdkülgse hulktahuka külgede paljundamise protsessi, kus külgede arvu N suurenedes hakkab välja kooruma ringjoone kujutis.



Esimene oluline küsimus on, et kas tõepoolest N lõpmatult suurendades tekib „ringjoon“ (see võiks olla meie mõistes piirväärtus antud protsessis) või jääb ikkagi midagi olulist puudu? Näiteks, kui me jaotamise teel saadud kujundist lahutame ringjoone enda, siis millised punktid jäävad üle (kas üldse midagi jääb üle)?

Teine küsimus on, kuidas seda üldse teada võiks saada? Graafik on küll hea abiline, aga mingist hetkest ei suuda me silmadega graafiku järgi punkte eristada ja matemaatiliselt range tõestuse jaoks jääb sellest nagunii väheseks.

Näide 5.1 Vaatleme järgmist funktsiooni:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1,$$

mis ei ole määratud $x = 1$ korral. Viimane tähendab, et me ei saa leida funktsiooni väärtust $f(1)$. Proovides argumendiga x minna ühele kuitahes lähedale, saame siiski arvutada

x	…	0.9	0.99	0.999	…	1.001	1.01	1.1	…
$f(x)$	…	1.9	1.99	1.999	…	2.001	2.01	2.1	…

Newton'i aegadel ei olnud piirväärtuse mõiste veel päris selge, korrektselt range definitsioon puudus (see viimane ei seganud Newton'il ja Leibniz'il andmast väga olulisi praktilisi tulemusi).

Kasutati umbes sellist lähenemisviisi, et kui Δx voolab nulli, siis $2 + \Delta x$ voolab arvuks 2. Või siis, kui Δx on piisavalt väike (samal ajal ei tohi Δx võrduda nulliga), siis $2 + \Delta x$ on piisavalt lähedane arvuga 2. Paneme tähele, et need mõisted "piisavalt" ja "voolab" on üsna "udused" mõisted. Matemaatikas on olukordi, kus sellisest kirjeldusest ei piisa. Kui me ei saa Δx võtta võrdseks nulliga, siis me ei saa ka niisama lihtalt tõestada, et protsessi $2 + \Delta x$ tulemus on tõesti arv 2.

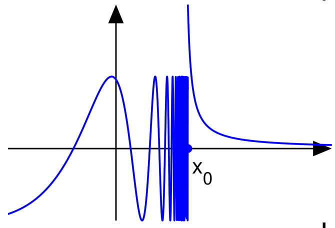
Näiteks, 1797. aastal üritas Joseph-Louis Lagrange tuletise mõistet edasi anda ilma piirväärtuse mõisteta, üritades läbi ajada ainult algebraliste vahenditega (astmeridadega). Lagrange mõistis, et tema väited ei olnud matemaatiliselt alati korrektsed, kuid ei pidanud neid erijuhte eriti tähtsaks.

Aastal 1817 Bernard Bolzano ja aastal 1821 Augustin-Louis Cauchy andsid (ε, δ)-tüüpi definitsioonid, mis hülgasid geomeetrilise lähenemise ja võtsid kasutusele analüütilise. Karl Weiestrass (1815 - 1897) andis definitsioonile kaasajal laialt kasutatud "lihvitud" sõnastuse.

Karl Weierstrass
Allikas: Wikipedia

Võib täheldada, et argumendi x lähenedes arvule 1 funktsiooni väärtused $f(x)$ lähenevad arvule 2. Oma arvutusi võiksime niimoodi jätkata, võttes x väärtusi arvule 1 järjest lähemal ja lähemal. Siin tekib aga kaks probleemi. Esiteks, kui lähedalt on vaja neid x väärtusi ikkagi võtta? Teiseks, ükskõik kui 1 lähedalt me x väärtusi ka ei võtaks, siis $f(x)$ täpset väärtust 2 me ikkagi arvutades ei saa.

Siin oli olukord veel lihtne, aga kui $f(x)$ väärtused läheneksid mingile irratsionaalarvule või hoopis võnguksid kiirelt ümber mingi punkti?



Allikas: Wikipedia

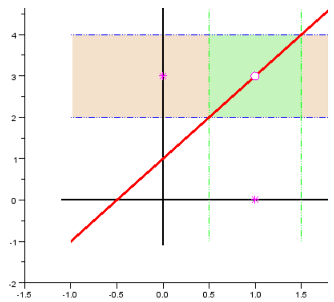
Tekib küsimus, mis asi on siis see funktsiooni väärtus 2, kui funktsioon ise kohal $x = 1$ määratud ei ole? Üsna pea näeme, et toodud väärtus 2 on meie funktsiooni f piirväärtus protsessis $x \to 1$.

◇ ◇ ◇

Märkus 5.1

Lihtsamal juhul võiks piirväärtusest kõnelda järgmiselt: argumendi x väärtuste lähenemine arvule a toob kaasa funktsiooni f väärtuste $f(x)$ lähenemise arvule L. Viimase jaoks kasutame järgmist tähistust:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$



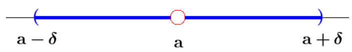
Selline sõnastus on tegelikult väga üldine. See seletab küll ära piirväärtuse mõiste sisu, kuid ei anna konkreetset eeskirja piirväärtuse leidmiseks ja tema rangeks eristamiseks mingitest muudest arvudest. Vaja on rangemat reeglit ja selle reegli tutvustamisega me järgnevalt tegelemegi.

5.2 Piirväärtuse (ε, δ)-keelne definitsioon

Olgu funktsioon f määratud punkti a mingis ümbruses

$$U_{a,\delta} := (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta), \quad \delta > 0, \quad a, \delta \in \mathbb{R}.$$

NB! Funktsioon f ei pea olema määratud punktis a endas.



Märkus 5.2

Järgnev matemaatiliselt range piirväärtuse

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

definitsioon on üles ehitatud järgmisel ideel.

Andes ette **suvalise** positiivse reaalarvu $\varepsilon > 0$, saab leida sellise punkti a ümbruse et **iga** argumendi x korral sellest ümbrusest erinevus $|f(x) - L|$ jääb väiksemaks kui meie etteantud arv ε.

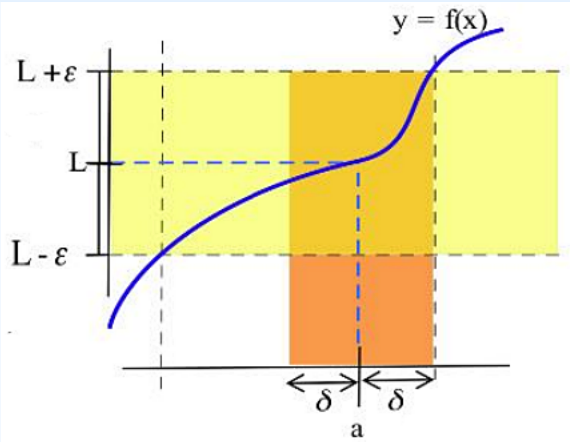
Definitsioon 5.1

Arvu L nimetatakse funktsiooni f piirväärtuseks protsessis $x \to a$, kui **iga** positiivse arvu $\varepsilon > 0$ jaoks **leidub** selline positiivne arv $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, et **iga** x korral, mis rahuldab tingimust

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{5.1}$$

kehtib võrratus

$$|f(x) - L| < \varepsilon. \tag{5.2}$$



(Allikas: [3])

Sel juhul kirjutame

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

või ka

$$f(x) \to L, \quad \text{kui } x \to a.$$

Üliõpilane: „Hobene kimab kiirusega 50 km/h. Mida see võiks tähendada?“
Professor: „Võttes suvalise $\varepsilon > 0$, leidub selline $\delta > 0$, et kui $0 < |t_2 - t_1| < \delta$, siis kehtib

$$\left| \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} - 50 \right| < \varepsilon.\text{“}$$

Üliõpilane: „Jumala pärast, kuidas on võimalik nii jabura vastuse peale tulla?“

Sümbol lim on lühend ladinakeelsest sõnast *limes*, mis tähendab piiri.

Märkus 5.3

Formaalselt saab $\lim_{x \to a} f(x) = L$ definitsiooni kirja panna järgmiselt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \, (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon). \tag{5.3}$$

Märkus 5.4

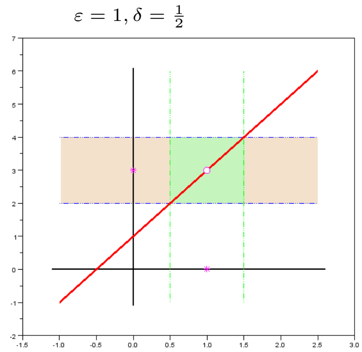
Vaadeldavas protsessis $x \to a$ eeldame, et $x \neq a$ (selle garanteerib definitsiooni võrratus $|x - a| > 0$), mis võimaldab vaadelda piirväärtust ka juhul, kui a ei kuulu funktsiooni f määramispiirkonda.

Näide 5.2 Tõestame piirväärtuse definitsiooni abil, et sirge $y = 2x + 1$ piirväärtus, argumendi x lähenemisel arvule 1, on arv 3.

Fikseerime suvalise postiivse reaalarvu $\varepsilon > 0$. Märgime, et

$$|f(x) - L| = |(2x + 1) - 3| = 2 \cdot |x - 1|.$$

Peame näitama, et $|f(x) - L| < \varepsilon$ iga argumendi x korral piirkonnast $0 < |x - 1| < \delta$.



Näeme, et $2 \cdot |x - 1| < \varepsilon$, kui võtta $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Sel juhul saame, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ nii, et iga argumendi x korral ümbrusest

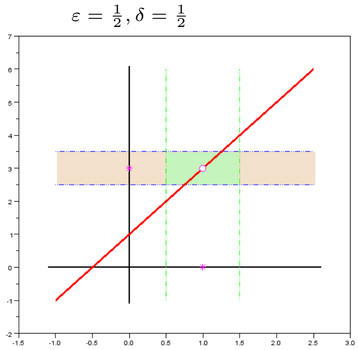
$$0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

järeldub võrratus

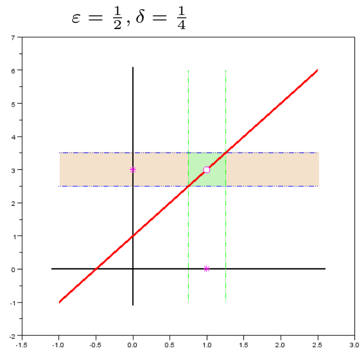
$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Seega tõepoolest

$$\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3.$$



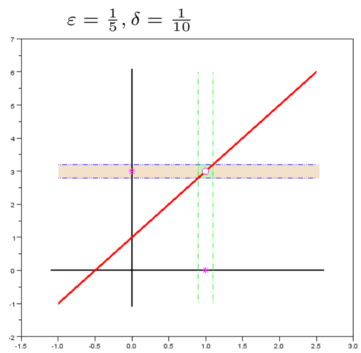
Näiteks, võtame $\varepsilon = 1$. Siis sobib $\delta = \frac{1}{2}$ ja δ-piirkonnaks on $(1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta) = (0.5, 1) \cup (1, 1.5)$. Paneme tähele, et arvuks δ sobib ka iga väiksem arv $0 < \delta < \frac{1}{2}$, see ei ole üheselt määratud. Tähtis on, et leidub mingi $\delta > 0$, et $|f(x) - 3| < 1$.



Kui me võtame mingi teise arvu, näiteks $\varepsilon = \frac{1}{2}$, siis $\delta = \frac{1}{2}$ ei sobi enam, kuna näiteks $0.6 \in (0.5, 1) \cup (1, 1.5)$ korral $|f(0.6) - 3| = 0.8 > \varepsilon = \frac{1}{2}$. Järelikult peame otsima mingit teist arvu $\delta > 0$. Sobib näiteks $\delta = \frac{1}{4}$ ja δ-piirkonnaks on $(1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta) = (0.75, 1) \cup (1, 1.25)$.

Kui me võtame $\varepsilon = \frac{1}{5}$, siis sobib $\delta = \frac{1}{10}$ ja δ-piirkonnaks on $(1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta) = (0.9, 1) \cup (1, 1.1)$. $\diamond$

$\diamond \diamond \diamond$



Märkus 5.5

Alati, kui sobib mingi $\delta > 0$, siis sobib ka iga väiksem $0 < \delta_* < \delta$ (kuna punkti a väiksem ümbrus asub suurema ümbruse sees).

Ülesanne 5.1 Tõestada, et kui $\lim_{x \to a} f(x) = L$, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$ nii, et iga argumendi x korral piirkonnast $0 < |x - a| < \delta$ kehtib võrratus

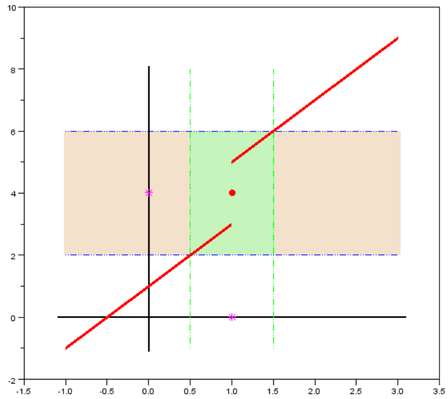
$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Näide 5.3 Kontrollida, kas tükiti lineaarse funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ 4, & x=1 \\ 2x+3, & x>1 \end{cases}$$

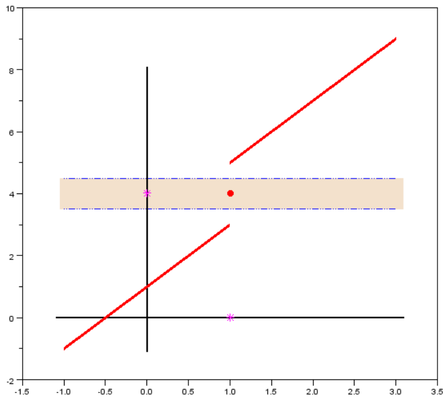
piirväärtus protsessis $x \to 1$ on arv 4, s.t. kas $\lim\limits_{x\to 1} = 4$?

$\varepsilon = 2,\ \delta = \frac{1}{2}$



Võttes suurema arvu $\varepsilon = 2 > 0$, saame näiteks leida $\delta = \frac{1}{2}$ nii, et $|f(x) - 4| < 2$ iga $x \in (0.5, 1) \cup (1, 1.5)$ korral.

$\varepsilon = \frac{1}{2},\ \delta =???$



Aga kui näiteks $\varepsilon = \frac{1}{2}$, siis võib joniselt näha, et siniste punktiiride vahele jääb ainult üks funktsiooni f väärtus: $f(1) = 4$, väärtus 1 aga ei kuulu ühtegi otsitavasse δ-piirkonda.

Kui võtta $x > 1$, siis alati

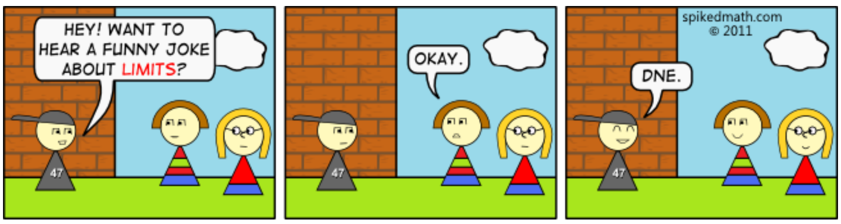
$$|f(x) - L| = |2x+3-4| = |2x-1| > 1 > \frac{1}{2}, \quad x > 1.$$

Samuti, võttes $x < 1$, siis alati

$$|f(x) - L| = |2x+1-4| = |2x-3| > 1 > \frac{1}{2}, \quad x < 1.$$

Meil ei õnnestu kuidagi leida arvu $\delta > 0$, et definitsiooni 5.1 nõuded oleksid täidetud. Seega funktsiooni f piirväärtus protsessis $x \to 1$ ei ole arv 4. Analoogiliselt võib tõestada (mitte ainult joonise järgi), et tegelikult funktsioonil f puudub igasugune piirväärtus protsessis $x \to 1$.

$\diamond \diamond \diamond$



"DNE" = "Does Not Exist" (Allikas: spikedmath.com)

Näide 5.4 Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}.$$

Näitame, et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$. Kui $x \neq 2$, siis

$$|f(x) - L| = |x^2 - 4| = |x-2|\,|x+2|.$$

Paneme tähele, et meil on punkti 2 ümbruseks piirkond $(2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta)$ ehk $0 < |x-2| < \delta$.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\delta < 1$, s.t. me otsime väiksemat δ-piirkonda suurema piirkonna $(1,2) \cup (2,3)$ (ehk $0 < |x-2| < 1$) sees. Siis kehtib $|x+2| < 5$ ja

$$|f(x) - L| = |x^2 - 4| = |x-2|\,|x+2| < 5 \cdot |x-2| < 5 \cdot \delta.$$

Näeme, et kui võtta $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\right\}$, siis iga suvalise $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\right\} > 0$ nii, et iga

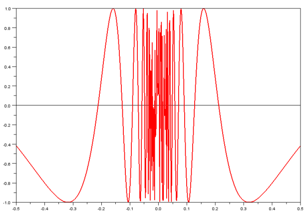
$$x \in (2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta) \subset (1,2) \cup (2,3)$$

korral kehtib võrratus

$$|f(x) - L| = |f(x) - 4| < 5 \cdot \delta \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 4| < \varepsilon.$$

◇ ◇ ◇

Funktsioonil $\cos\frac{1}{x}$ puudub piirväärtus protsessis $x \to 0$.



Ülesanne 5.2
Näidata, et $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ ja samas $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ ei eksisteeri.

5.3 Lõpmatud piirväärtused

Definitsioon 5.2
Öeldakse, et funktsioonil f on lõpmatu piirväärtus protsessis $x \to a$, kui **iga** positiivse arvu $M > 0$ jaoks **leidub** selline positiivne arv $\delta = \delta(M) > 0$, et **iga** $x \in X$ korral, mis rahuldab tingimust

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{5.4}$$

kehtib võrratus

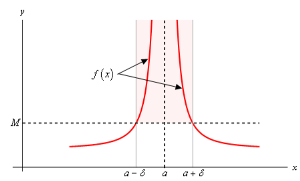
$$f(x) > M \quad (\text{või siis } f(x) < -M). \tag{5.5}$$

Sel juhul kirjutame

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad (\text{või siis } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty).$$

Albert Einstein: “Ainult kaks asja on lõpmatud: universum ja inimese lollus, ning ma pole kindel esimeses.”

Funktsiooni piirväärtus on lõpmatu, kui iga etteantud positiivse reaalarvu $M > 0$ korral leidub punkti a selline ümbrus, et iga argumendi x väärtuse korral sellest ümbrusest funktsiooni väärtus $f(x)$ on suurem kui etteantud arv M.



Allikas: Pauls Online Notes : Calculus I

Märkus 5.6
Funktsiooni f lõpmatu piirväärtus ∞ näitab, et antud funktsioon on selles protsessis ülalt tõkestamata ($f(x) \to \infty$), analoogiliselt $-\infty$ näitab, et f on alt tõkestamata ($f(x) \to -\infty$).

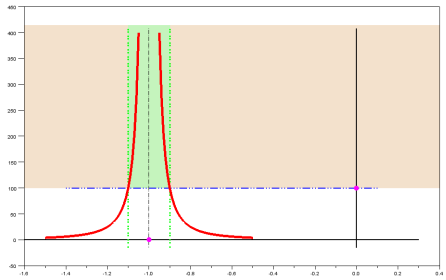
Näide 5.5 Tõestame, et

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = \infty.$$

Olgu $M > 0$ suvaline etteantud arv. Vaatame neid $x \neq -1$ väärtusi, mille korral $(x+1)^2 < \frac{1}{M}$. Sel juhul

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > M.$$

Võttes $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}} > 0$ (siis $0 < |x+1| < \delta$) näeme, et definitsiooni 5.3 nõuded on täidetud.



Näiteks, olgu $M = 100 > 0$. Siis leidub $\delta = \frac{1}{\sqrt{100}} = 0.1 > 0$ nii, et iga $x \in (-1.1, -0.9) \setminus \{-1\}$ korral

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 100.$$

◇ ◇ ◇

5.4 Funktsiooni piirväärtuse omadused

Praktikas on piirväärtuse definitsiooni kasutamine siiski küllalt tülikas. Matemaatikas on tõestatud rida piirväärtuse omadusi, mida on palju lihtsam kasutada. Anname siinkohal ka mõned tõestused, kuid neid ei pea eksamil oskama. Teisalt, nende tõestuste korralik jälgimine aitab aru saada piirväärtuse matemaatilisest ülesehitusest.

Teoreem 5.1

Piirväärtuse ühesus. Vaadeldavas protsessis saab funktsioonil olla ainult üks piirväärtus.

Tõestus. Tõestuse võib leida näiteks õpikust [5]. □

Definitsioon 5.3

Funktsiooni f nimetatakse tõkestatuks hulgal X, kui leidub positiivne arv $M > 0$, nii et $|f(x)| \leq M$ iga $x \in X$ korral.

Funktsioon $f(x) = x$ on tõkestatud lõigus $[-3, 2]$, kuna näiteks $M = 100$ jaoks (tegelikult iga $M \geq 3$ jaoks) kehtib $|f(x)| = |x| \leq 100$ iga $x \in [-3, 2]$ korral. Samas ei ole f tõkestatud hulgal $\mathbb{R}$.

Teoreem 5.2

Kui $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ja funktsioon $y = f(x)$ on tõkestatud punkti a mingis ümbruses, siis

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0. \tag{5.6}$$

Tõestus. Kuna $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, siis definitsiooni järgi iga $\varepsilon > 0$ korral leidub positiivne arv δ_g nii, et iga argumendi x korral piirkonnast $0 < |x - a| < \delta_g$ kehtib võrratus $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ (vt. ka ülesannet 5.1). Võtame iga $\varepsilon > 0$ jaoks $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\} > 0$. Sel juhul kehtib iga $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ jaoks

Eelduse järgi f on tõkestatud punkti a mingis ümbruses (näiteks piirkonnas $0 < |x - a| < \delta_f$), seega leidub $M > 0$ nii, et $|f(x)| \leq M$ iga $x \in (a - \delta_f, a) \cup (a, a + \delta_f)$.

$$|f(x) \cdot g(x) - 0| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |g(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

□

Näide 5.6 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot\sin\left(\frac{1}{|x-1|}\right)\right].$$

Siin $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ (lihtne näidata ka definitsiooni põhjal). Samas piirväärtust $\lim\limits_{x\to 1}\sin\left(\frac{1}{|x-1|}\right)$ ei leidu (selge kasvõi joonise järgi, argument $\frac{1}{|x-1|}\to\infty$). Kuna aga $|\sin(u)|\leq 1$ iga $u\in\mathbb{R}$ korral (s.t. sin on tõkestatud), siis teoreemi 5.4 järgi

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot\sin\left(\frac{1}{|x-1|}\right)\right]=0.$$

◇ ◇ ◇

On loogiline, et lõpliku arvu või suuruse korrutamine lõpmata väikese arvuga annab tulemuseks lõpmata väikese arvu.

Teoreem 5.3

Kui leiduvad **lõplikud** piirväärtused

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to a}g(x)=B, \tag{5.7}$$

siis kehtivad järgmised tehetega seotud omadused:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;
2. $\lim\limits_{x\to a}[c\cdot f(x)]=c\cdot A, \quad c\in\mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}, \quad B\neq 0.$

Piirväärtuse leidmiseks praktikas kasutame enamasti just nimelt neid omadusi. Matemaatilist (ϵ,δ)-keelset definitsiooni läheb vaja siis, kui tegemist ei ole standardolukorraga.

Teoreemi eeldus lõplike piirväärtuste leidumise kohta (A ja B peavad olema üheselt määratud reaalarvud) on väga oluline.

Tõestus. Tõestused võib leida näiteks õpikust [5]. Tõestame siinkohal esimese omaduse vahe kohta.

Eelduse järgi $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ ehk definitsiooni järgi (vt. ka ülesannet 5.1) leidub iga $\varepsilon>0$ korral positiivne arv $\delta_f>0$ nii, et iga argumendi x korral piirkonnast $0<|x-a|<\delta_f$ kehtib võrratus

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Eelduse järgi $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$ ehk definitsiooni järgi leidub iga $\varepsilon>0$ korral positiivne arv $\delta_g>0$ nii, et iga argumendi x korral piirkonnast $0<|x-a|<\delta_g$ kehtib võrratus

$$|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Võtame iga suvalise $\varepsilon>0$ korral $\delta=\min\{\delta_f,\delta_g\}>0$. Sel juhul iga argumendi x korral piirkonnast $0<|x-a|<\delta$ kehtib võrratus

$$\begin{aligned}|(f(x)-g(x))-(A-B)|&=|(f(x)-A)-(g(x)-B)|\\&\leq|f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Märkus 5.7

Teoreemi nõue, et peavad leiduma lõplikud piirväärtused $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$ on olulised. Vastasel juhul näiteks $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$ ja $g(x) = \frac{1}{|x|}$ korral

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

aga kasutades valesti teoreemi esimest omadust, saaksime

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) \to \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{|x|}\right) + \lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = -\infty + \infty.$$

Suurus $\infty - \infty$ on täiesti määramata suurus (üks määramatus miinus mingi teine määramatus) ja ei võrdu iialgi nulliga!!!

Antud näitest võime ka näha, et lõpmatute piirväärtuste $\lim f(x)$ või $\lim g(x)$ korral (või ka siis, kui neid piirväärtusi hoopis ei eksisteerigi) võib funktsioonide summal $f+g$ antud protsessis lõplik piirväärtus ikkagi leiduda. Analoogiline on olukord vahe, korrutise ja jagatise korral.

Teoreem 5.4

Piirväärtuse monotoonsus. Kui punkti a teatavas ümbruses $U_{a,\delta}$ kehtib võrratus

$$f(x) < g(x) \quad (\text{või siis } f(x) \le g(x)), \quad \forall x \in U_{a,\delta},$$

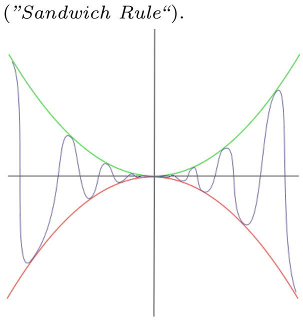
ning leiduvad lõplikud piirväärtused $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ja $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, siis kehtib võrratus

$$A \le B \quad \text{ehk} \quad \lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

Ülesanne 5.3

Tuua näide, kus rangest võrratusest $f(x) < g(x)$ ei järeldu range võrratus $\lim f(x) < \lim g(x)$.

Keskmise muutuja omadust nimetatakse ka *"Squeeze Theorem"* või ka "võileiva omaduseks" (*"Sandwich Rule"*).



Nulliümbruses, keskmine sinine joon $g(x)$ saab sama piirväärtuse, mis ülemine roheline $h(x)$ ja alumine punane $f(x)$ (Allikas: Wikipedia)

Teoreem 5.5

Keskmise muutuja omadus. Kui punkti a mingis ümbruses $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$, $\delta > 0$, kehtivad võrratused

$$f(x) \le g(x) \le h(x), \quad \forall x \in (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta),$$

ja leiduvad lõplikud piirväärtused

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A,$$

siis leidub ka piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ ning

$$\lim_{x\to a} g(x) = A.$$

Tõestus. Tõestus pärineb õpikust [5]. Kuna leiduvad lõplikud piirväärtused $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$, siis definitsiooni järgi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_f > 0 : 0 < |x-a| < \delta_f \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_h > 0 : 0 < |x-a| < \delta_h \quad \Rightarrow \quad |h(x) - A| < \varepsilon.$$

Samuti kehtib $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ mingis ümbruses, näiteks piirkonnas $0 < |x-a| < \delta_{fgh}$. Võtame $\delta = \min\{\delta_{fgh}, \delta_f, \delta_g\}$. Sel juhul iga $x \in U_{a,\delta}$ jaoks kehtivad võrratused

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon,$$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Neid võrratusi kombineerides saame

$$A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$$

ja järelikult

$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |g(x) - A| < \varepsilon.$$

Viimane aga tähendab, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et iga $x \in U_{a,\delta}$ korral kehtib võrratus $|g(x) - A| < \varepsilon$, s.t. $\lim_{x\to a} g(x) = A$. □

Näide 5.7 Kasutades omadust $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, leiame piirväärtuse

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6}.$$

Paneme tähele, et $n \to \infty$ korral kehtib

$$1 < 6 < n.$$

Sama moodi jäävad võrratused kehtima, kui neist võtta mingit järku juur,

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{6} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Kuna $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ (1 on ainuke reaalne n-astme juur) ja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, siis võileiva omaduse tõttu järeldub, et ka

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6} = 1.$$

◇ ◇ ◇

5.5 Funktsiooni piirväärtuse arvutamine

Piirväärtuse arvutamine toetub eelnevas tutvustatud piirväärtuste omadustele. Vaatleme järgnevalt mõnda võtet piirväärtuse arvutamiseks, kusjuures selliseid, mis ei kasuta keerulisi (ε, δ)-keelseid definitsioone.

Teoreem 5.6

Piirväärtus elementaarfunktsioonidest. Kui f on elementaarfunktsioon ja punkt a kuulub tema määramispiirkonda, $a \in X$, siis

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Märkus 5.8

Teoreem lubab väga paljudel juhtudel piirväärtuse leidmist lihtsustada. Näiteks,

$$\lim_{x\to 3}\left(\cos\frac{2x-3}{x+1} + e^{4x+3}\right) = \cos\frac{3}{4} + e^{15}.$$

Samas ei saaks piirväärtust niimoodi leida, kui protsessi $x \to 3$ asemel oleks protsess $x \to -1$, kuna $\frac{1}{x+1}$ ei oleks määratud punktis $x = -1$.

Otsene arvutamine. Üks võimalus on argumendi x asemele panna arvule a lähedasi arve ja vaadata, mis edasi saab. Sellist võtet kasutasime peatüki alguses. Võte nõuab aga liialt palju arvutamisi ja on üsna ebakindel meetod.

Argumendi asendamine. Asendame argumendi x suurusega $a \pm \delta$, $\delta > 0$, ja üritame avaldist teisendada. Selline võte võib praktikas anda väga häid tulemusi (kuigi, ettevaatlik tuleb siiski olla).

Näide 5.8 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}.$$

Tegemist on elementaarfunktsiooni piirväärtusega, kuid kahjuks $x = 3$ ei kuulu tema määramispiirkonda. Asendame $x = 3 \pm \delta$ ja leiame

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{(3\pm\delta)^2-9}{3\pm\delta-3} = \lim_{\delta\to 0}\frac{9\pm 6\delta+\delta^2-9}{\pm\delta} = \lim_{\delta\to 0}(6\pm\delta) = 6.$$

◇ ◇ ◇

Avaldise teisendamine. Enamus kordadel on otstarbekas avaldist veidi teisendada, et võimaluse korral välja taandada algselt eksisteeriv määramatus (näiteks nulliga jagamine).

Polünoomide korral on kasulik meelde tuletada järgmised teisendused:

$$\begin{aligned} (a\pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, & (a\pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), & a^3 \pm b^3 &= (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Näide 5.9 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}.$$

Kirjutame,

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x^2+3x+9) = 27.$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.10 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}.$$

Siin $x = 0$ ei kuulu elementaarfunktsiooni määramispiirkonda. Järgnevalt kasutame "klassikalist" ühega korrutamise võtet,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1} \\ &= \lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1) = 2.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

5.6 Absoluutse vea leidmise seos piirväärtuse definitsiooniga *

Anname siinkohal ühe võimaliku käsitluse piirväärtuse definitsiooni rakendamise kohta. Teeme seda näite varal.

Meil on vaja lõigata 5 meetri pikkuseid raudlatte (kõik niivõrd võrdse pikkusega kui võimalik) ja moodustada nendest ruudukujuline raam väliekraani jaoks (oletame, et kinnitus on taoline, et saab moodustada ruudu). Siinjuures peab tulemus olema selline, et moodustatud ruudu pindala ei erineks rohkem kui 0.2% vajalikust $25-st$. Kui suur võib olla (absoluutne) viga lattide lõikamisel?

Esiteks märgime, et ruudu pindala arvutamiseks saame moodustada funktsiooni $f(x) = x^2$, mille korral

$$\lim_{x\to 5} x^2 = 25.$$

Praktikas teeme mõõtmisel ja lõikamisel paratamatult mingi vea, ükskõik kui täpset tehnoloogiat me ka ei kasutaks ja ükskõik kui hoolsad me ka ei oleks.

Sellest, et tulemus peab olema 0.2% vajalikust 25-st (ehk 0.05), saame tingimuse

$$|f(x) - 25| < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 25| < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 25 - 0.05 < x^2 < 25 + 0.05.$$

Funktsiooni x^2 väärtused peavad jääma vahemikku ± 0.05 ühikut 25 ümbruses. Piirväärtuse definitsioon kehtib iga $\varepsilon > 0$ korral ja sellisel juhul ka 0.05 jaoks. Kuna piirväärtus eksisteerib, siis teame, et leidub selline $\delta > 0$, et meie tingimus $|x^2 - 25| < 0.05$ kehtib iga $x \in (5 - \delta, 5) \cup (5, 5 + \delta)$ korral (ehk $0 < |x - 5| < \delta$). Antud juhul

$$|x^2 - 25| = |x - 5||x + 5| \leq 10.01\,\delta,$$

kui piirata $\delta \leq 0.01$ (s.t. lõikamine peaks toimuma vähemalt 1 cm täpsusega, siis $x \in (4.99, 5.01)$ ja $|x + 5| \leq 10.01$).

Teisiti, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ võiks tähendada ka seda, et me suudame täita mistahes tellija poolt soovitud lõpptoodangu täpsuse $L \pm \varepsilon$, nõudes „töötajatelt“ materjali x väärtust piirkonnast $a \pm \delta$, kusjuures viimane on (vähemalt teoreetiliselt) saavutatav ja ideaalset väärtust $x = a$ ei ole vajagi nõuda.

Näeme, et $|x^2 - 25| < 0.05$, kui nõuda

$$10.01\,\delta < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \delta < \frac{0.05}{10.01} \approx 0.004995.$$

Saime, et me peame lauad mõõtma ja lõikama täpsusega 5 meetrit ± 4.995 millimeetrit ($0 < |x - 5| < 0.004995$). Sellisel juhul on garanteeritud, et soovitud pindala ei erine 25-st rohkem kui 0.05.

Paneme tähele, et kogu „muusika“ tellib ε väärtus 0.05 (nö. tellija soovitud täpsus). Me võime alati täpsemini lõigata, aga me ei tohi saada näiteks latti pikkusega 5.006. Sellisel juhul

$$|x^2 - 25| = |5.006^2 - 25| \approx 0.06 > 0.05.$$

Viited

[1] M. Cockett, G. Doggett. Maths for Chemists, 2nd Edition. RSC Publishing, Cambridge, 2012.

[2] J. V. Grabiner. Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. Amer. Math. Mon. 90 (3): 185-194, 1983.

[3] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[4] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross, 1997-98.

[5] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[6] V. Soomer. Matemaatiline analüüs. Tartu Riiklik Ülikool, 1988.

[7] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.