Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

6 Tähtsad piirväärtused. Funktsiooni pidevus

Sisukord

Kontrolltöö teemad

1. Tähtsad piirväärtused (teoreem 6.2, järeldus 6.1, teoreem 6.3, teoreem 6.4), näide 6.4, 6.5.
2. Ekvivalentsed lõpmata väikesed funktsioonid, näide 6.7-6.8.
3. Funktsiooni pidevus, näide 6.10.

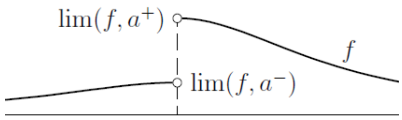
Eksamiteemad

1. Ühepoolsete piirväärtuste mõiste.
2. Kahepoolse piirväärtuse leidumise teoreem.
3. Tähtsad piirväärtused (teoreem 6.2, järeldus 6.1, teoreem 6.3, teoreem 6.4).
4. Piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ tõestus.
5. Lõpmata väikesed (hääbuvad) funktsioonid.
6. Ekvivalentsed lõpmata väikesed funktsioonid, teoreem 6.5.
7. Pideva funktsiooni mõiste.
8. Pideva funktsiooni mõiste argumendi muudu korral (märkus 6.5).
9. Elementaarfunktsioonide pidevus.

6.1 Ühepoolsed piirväärtused

Vaatleme piirprotsesse:

1. $x \to a$, $x > a$, lähenemine paremalt, s.o. parempoolne piirväärtus. Tähistame $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ või $f(a+)$.
2. $x \to a$, $x < a$, lähenemine vasakult, s.o. vasakpoolne piirväärtus. Tähistame $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ või $f(a-)$.



Allikas: [3]

Märkus 6.1

Piirväärtuse definitsioonis 5.1 tingimus $0 < |x-a| < \delta$ omandab vastavalt kuju $0 < x - a < \delta$ (parempoolse piirväärtuse korral) või $0 < a - x < \delta$ (vasakpoolse piirväärtuse korral).

Teoreem 6.1

Kui eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused $f(a+)$ ja $f(a-)$, siis nn. kahepoolne piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} = L$ eksisteerib parajasti siis, kui

$$f(a+) = f(a-) = L.$$

Näide 6.1 Funktsioonil

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

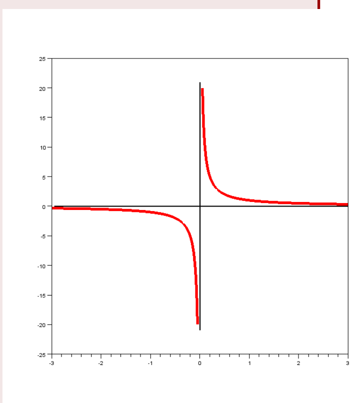
leiduvad ühepoolsed piirväärtused

$$f(0+) = \infty, \quad f(0-) = -\infty,$$

kuid on selge, et ei leidu kahepoolset piirväärtust $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$.

◇ ◇ ◇

NB! Toodud piirväärtus on kontrolltöödes väga sageli valesti leitud.



Definitsioon 6.1

Arvu L nimetatakse funktsiooni f piirväärtuseks protsessis $x \to \infty$ (või $x \to -\infty$), kui **iga** positiivse arvu $\varepsilon > 0$ jaoks **leidub** selline positiivne arv $N = N(\varepsilon) > 0$, et iga

$$x > N \quad (x < -N), \quad x \in X, \tag{6.1}$$

korral kehtib võrratus

$$|f(x) - L| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Sel juhul kirjutame

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = L\right).$$

Ühepoolsed piirväärtused on ka $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Näide 6.2 Tõestada, et

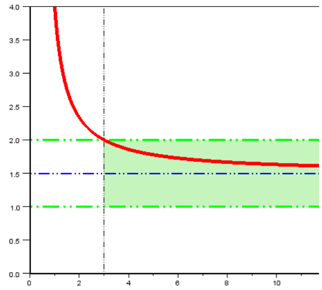
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{3}{2}.$$

Olgu $\varepsilon>0$ suvaline ette antud arv. Võime kirjutada

$$|f(x)-L|=\left|\frac{3x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2\,|2x-1|}=\frac{5}{2\,(2x-1)},\qquad x>\frac{1}{2}.$$

Järgnevalt leiame $x>N>\frac{1}{2}$ jaoks, et

$$2x>2N\quad\Leftrightarrow\quad 2x-1>2N-1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{2x-1}<\frac{1}{2N-1},\qquad x>\frac{1}{2}.$$



Seega

$$|f(x)-L|=\frac{5}{2\,(2x-1)}<\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2N-1}=\varepsilon,$$

kui võtta

$$N=\frac{1+\frac{5}{2\varepsilon}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{4\varepsilon}>0.$$

Kui näiteks $\varepsilon=\frac{1}{2}$, siis $N=3$ ja iga $x>3$ korral $|f(x)-L|<\frac{1}{2}$.

◇ ◇ ◇

Näide 6.3 Leiame selle sama piirväärtuse

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x-1},$$

aga seekord ilma definitsioonita, kasutades piirväärtuse omadusi. Kirjutame

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{3}{2},$$

kuna $\frac{1}{x}\to 0$, kui $x\to\infty$.

◇ ◇ ◇

Ühepoolsete piirväärtuste jaoks kehtivad samad piirväärtuse omadused, mis kahepoolsete protsesside korral.

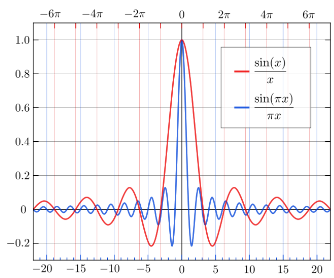
Märkus 6.2

Asendades definitsioonis 6.1 tingimuse $|f(x)-L|<\varepsilon$ tingimustega $f(x)>N$ (vastavalt $f(x)<-N$), saame defineerida piirväärtused

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty\qquad\left(\lim_{x\to-\infty}f(x)=\pm\infty\right).$$

6.2 Tähtsad piirväärtused

Tuletame meelde, et radiaan on kesknurk, mis toetub raadiuse pikkusele kaarele, $1\,rad\approx 57°17'$.



Allikas: Wikipedia

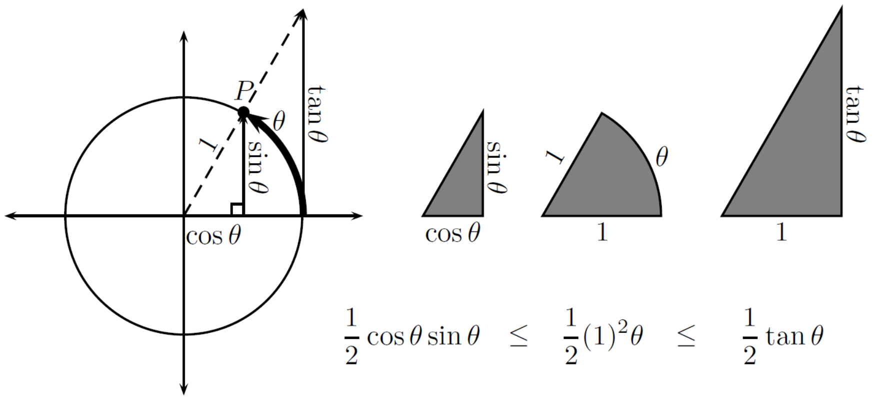
Teoreem 6.2

Olgu θ nurk radiaanides. Siis kehtib valem

$$\lim_{\theta\to\mathbf{0}}\frac{\sin\theta}{\theta}=\mathbf{1}.\tag{6.3}$$

Tõestus. Tõestuse leiab näiteks õpikutest [1, 4]. Vaatleme funktsiooni $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$. Punkt $\theta = 0$ ei kuulu funktsiooni f määramispiirkonda, kuid mujal on f määratud.

Funktsioon f on paarisfunktsioon ja piisab näidata, et $\lim\limits_{\theta\to 0+} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$. Vaatleme ringjoont raadiusega 1. Asetame I veerandisse ringjoonele punkti P. Me moodustame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusi pikkus on 1, ringi sektori kuni punktini P (kaare pikkusega θ radiaani) ja täisnurkse kolmnurga külje pikkustega 1 ja $\tan\theta$ (vt. joonist).



Allikas: [1]

Ühikringi pindala on π ja ümbermõõt 2π, millest pindala avaldub poole ümbermõõduga. Sama suhe jääb kehtima, kui võtame ringist mingi väiksema osa. Siit saame, et loodud sektori pindala on $\frac{\theta}{2}$. Jooniselt on selge, et moodustatud kujundite pindalade kohta kehtivad võrratused

$$\frac{\cos\theta\sin\theta}{2} \leq \frac{1}{2}\theta \leq \frac{\tan\theta}{2}$$

ehk

$$\cos\theta\sin\theta \leq \theta \leq \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Kuna $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, siis võime jagada võrratust suurusega $\sin\theta > 0$,

$$\cos\theta \leq \frac{\theta}{\sin\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}.$$

Kuna $\lim\limits_{\theta\to 0+} \cos\theta = 1$ ja $\lim\limits_{\theta\to 0+} \dfrac{1}{\cos\theta} = 1$, siis võileiva omadusest saame

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1.$$

Nüüd võib kirjutada

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{1}{\frac{\theta}{\sin\theta}} = 1.$$

□

Järeldus 6.1

Olgu θ nurk radiaanides. Siis kehtivad valemid

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1, \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\arcsin\theta}{\theta} = 1, \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\arctan\theta}{\theta} = 1. \tag{6.4}$$

Järeldub seosest $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Näide 6.4 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{5x}=\frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}.$$

Kui $x\to 0$, siis ka $2x\to 0$ ja me saame muutujavahetuse $y=2x$ abil kirjutada

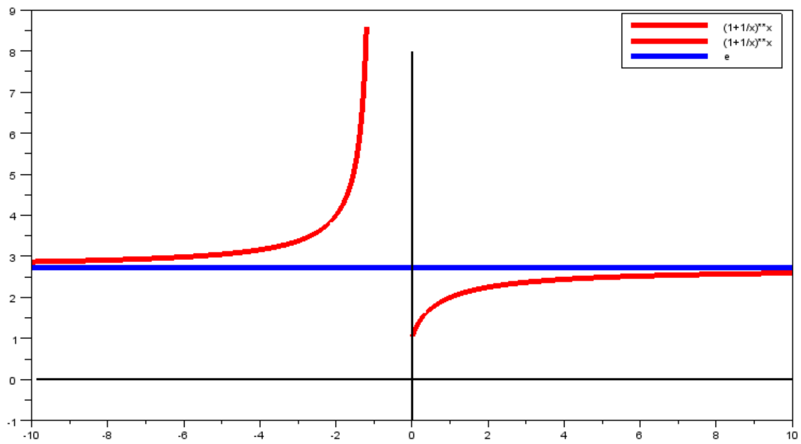
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{5x}=\frac{2}{5}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}=\frac{2}{5}\cdot 1=\frac{2}{5}.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 6.3
Kehtivad valemid

$$\lim_{\mathbf{x}\to\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)^{\mathbf{x}}=\mathbf{e},\quad \lim_{\mathbf{x}\to-\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)^{\mathbf{x}}=\mathbf{e}\tag{6.5}$$

Tõestus. Tõestus on toodud osaliselt õpikus [5]. □



Näide 6.5 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{(x-1)+4}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1},$$

kuna $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{4}=1$. Kui $x\to\infty$, siis ka $y:=x-1\to\infty$. Järelikult

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 6.4
Kehtib valem

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty}\sqrt[n]{n}=\mathbf{1}\tag{6.6}$$

Tõestus. Tõestus on toodud õpikus [4]. □

6.3 Ekvivalentsed lõpmata väikesed funktsioonid

Definitsioon 6.2

Funktsiooni $\alpha = \alpha(x)$ nimetame lõpmata väikeseks (hääbuvaks) piirprotsessis $x \to a$, kui

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Sel juhul me kirjutame $\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{o}(\mathbf{1})$.

Näide 6.6 Näiteks, $x^2 = o(1)$, $x \to 0$ ja $\sin(x-1) = o(1)$, $x \to 1$.

⋄ ⋄ ⋄

Märkus 6.3

Koos väikese $o(1)$ tähisega kasutatakse ka suurt $O(1)$ tähist ja sellisel juhul tähendab see funktsiooni f tõkestatust protsessis $x \to a$, s.t.

$$|f(x)| \le M \quad \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta), \quad M, \delta > 0,$$

ja me kirjutame $f(x) = O(1)$, $x \to a$.

Sümboleid $o(1)$ ja $O(1)$ nimetatakse ka Landau sümboliteks saksa matemaatiku Edmund Landau (1877 - 1938) järgi (ütleme "väike o ühest" ja "suur O ühest").

Märkus 6.4

On üsna ilmne, et kahe lõpmata väikese funktsiooni summa, vahe ja korrutis on samuti lõpmata väikesed antud piirprotsessis. Viimane järeldub otseselt piirväärtuse omaduste teoreemist 5.3.

Kahe lõpmata väikese suuruse jagatis võib anda väga erinevaid tulemusi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^4} = \infty, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} \quad \text{ei leidu.}$$

NB! Kui te saate piirväärtuse arvutamisel tulemuseks $\frac{0}{0}$, siis on tegemist määramata suurusega. Sel juhul tuleb piirväärtuse leidmiseks avaldist sobivalt lihtsustada või teisendada.

Definitsioon 6.3

Lõpmata väikeseid funktsioone $\alpha = \alpha(x)$ ja $\beta = \beta(x)$ nimetatakse ekvivalentseteks piirprotsessis $x \to a$, kui

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Sellisel juhul me kirjutame $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to a$.

Näide 6.7 Näiteks $y = x-1$ on ekvivalentne funktsiooniga $y = \sin(x-1)$ piirprotsessis $x \to 1$, kuna

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

⋄ ⋄ ⋄

Teoreem 6.5

Kui piirprotsessis $x \to a$ lõpmata väikeste funktsioonide $y = \alpha(x)$, $y = \alpha_1(x)$, $y = \beta(x)$ ja $y = \beta_1(x)$ korral $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ja $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ ja eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

siis

1.
$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

2.
$$\lim_{x\to a} [\alpha(x)\cdot\beta(x)] = \lim_{x\to a} [\alpha_1(x)\cdot\beta_1(x)].$$

Antud teoreem võimaldab meil piirväärtuse leidmisel keerulisi avaldisi lihtsustada.

Tõestus. Teeme tõestuse jagatise kohta, korrutise kohta käib see analoogiliselt. Eelduse kohaselt leidub piirväärtus $\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ ja kehtivad

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \quad \lim_{x\to a} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Siis võime kirjutada

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \right) = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

□

Näide 6.8 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\arctan(3x)}.$$

Paneme tähele, et antud protsessis $\sin(x) \sim x$, seega $\sin(5x) \sim 5x$ ning analoogiliselt $\arctan(3x) \sim 3x$. Sel juhul

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\arctan(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

◇ ◇ ◇

6.4 Pidevad funktsioonid

Vaatleme reaalarvulisi funktsioone $y = f(x)$, $x \in X$.

Definitsioon 6.4

Funktsiooni f nimetatakse pidevaks punktis a, kui

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}). \tag{6.7}$$

Vastasel korral nimetatakse funktsiooni katkevaks punktis a.

Praktikas on pidevad funktsioonid väga olulisel kohal. Mitterangelt võime pidevast funktsioonist mõelda kui funktsioonist, mille graafiku joonestamisel ei pea pliiatsit paberilt tõstma.

Definitsioon 6.5

Me ütleme, et funktsioon f on pidev hulgal X, kui f on pidev selle hulga igas punktis. Kui $X = \mathbb{R}$, siis ütleme, et funktsioon f on pidev kõikjal.

Anname pidevuse definitsioonile teise kuju. On selge, et

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

kehtib parajasti siis, kui

$$\lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) = 0.$$

Tähistame argumendi muudu $\Delta x = x - a$ ning funktsiooni muudu $\Delta y = f(x) - f(a)$. Siis saame

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0. \tag{6.8}$$

Märkus 6.5

Funktsiooni pidevus ütleb meile, et argumendi x väiksel muutmisel ka funktsiooni muut Δy muutub vähe, ehk

$$\lim_{\mathbf{\Delta x\to 0}} \mathbf{\Delta y = 0}. \tag{6.9}$$

Analoogiliselt ühepoolsetele piirväärtustele on olemas ühepoolse pidevuse mõisted: vasakult pidev ja paremalt pidev. Sel juhul tuleb protsess $\Delta x \to 0$ välja vahetada vastava ühepoolse piirväärtusega $\Delta x \to 0-$ või $\Delta x \to 0+$.

Teoreem 6.6

Kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Näide 6.9 Viimase teoreemi järgi teame, et elementaarfunktsioon $f(x) = x^2$ on pidev kogu reaalteljel. Seega $f(3.14)$ on päris hea lähisväärtus täpsele väärtusele $f(\pi)$. Argumendi muut $\Delta x = \pi - 3.14$ ei ole suur, seega ka funktsiooni muut $\Delta y = f(\pi) - f(3.14)$ ei saa olla suur. Kui me tahame täpsemat tulemust, siis piisab võtta argumendi 3.14 asemel rohkem komakohti.

Kui funktsioon ei ole pidev mingis punktis, siis sellist omadust enam ei ole. Näiteks, $p(x)$ on kirja saatmise hinnafunktsioon

$$p(x) = \begin{cases} 34 \text{ senti} & , 0 < x < 100 \text{ grammi}, \\ 57 \text{ senti} & , 100 \le x \le 200 \text{ grammi}. \end{cases}$$

Sellisel juhul $p(99) = 34$, aga $p(101) = 57$, s.t. väike raskuse muutmine toob kaasa suure hinna kõikumise (punkti $x = 100$ ümber võime võtta kuitahes väikese raskuse muudu, aga hinna muutus jääb ikka nullist oluliselt suuremaks). Funktsioon p ei ole pidev punktis $x = 100$.

$\diamond \diamond \diamond$

Näide 6.10 Näidata, et punktis $x = 2$ katkeva funktsiooni

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

saab "jätkata" pidevaks funktsiooniks punktis $x = 2$.

Esiteks märgime, et f kui elementaarfunktsioon on pidev punkti 2 lähiümbruses. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}.$$

Jätkatud funktsioon g on pidev punktis $x = 2$, kuna $\lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$,

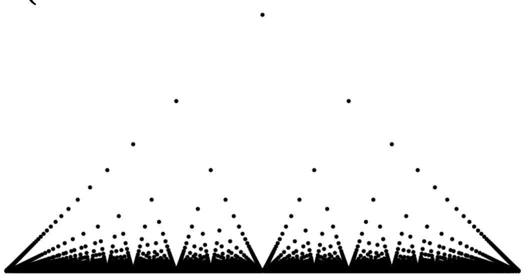
$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & , x \neq 2 \\ \frac{5}{4} & , x = 2 \end{array} \right\}.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 6.6

Toome ühe näite funktsioonist, mille pidevus on väga keeruline,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & , x \in \mathbb{Q}, \quad \text{q>0}, \quad \left(x = \frac{p}{q} \text{ taandatud kujul}\right), \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$



Allikas: Wikipedia, või ka [1]

Joonisel toodud funktsiooni konstrueeris saksa matemaatik Carl Johannes Thomae (1840 - 1921) ja see on pidev irratsionaalsetes punktides x, kuid katkev kõikides ratsionaalsetes punktides x. Antud funktsiooni nimetatakse ka popkorni või siis vihmapiiskade funktsiooniks.

6.5 Teoreem vahepealsetest väärtustest*

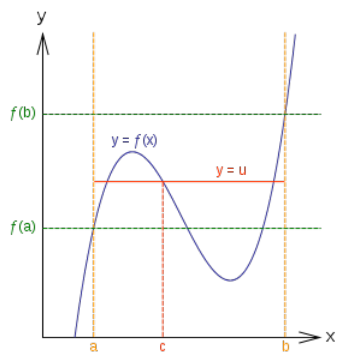
Lõigul pidevad funktsioonid asuvad nii teoorias kui praktikas väga tähtsal kohal. On palju tulemusi stiilis “kui funktsioon f on pidev mingis piirkonnas, siis kehtib ...”. Toome ühe lihtsa näite, mis omab ka praktikas olulist rolli.

Teoreem 6.7

Teoreem vahpealsetest väärtustest (*Intermediate Value Theorem*, vt. [1, 2]). Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis $f(x)$ väärtus võib omada iga väärtust arvude $f(a)$ ja $f(b)$ vahel. Täpsemalt, kui

$$f(a) \leq y_0 \leq f(b),$$

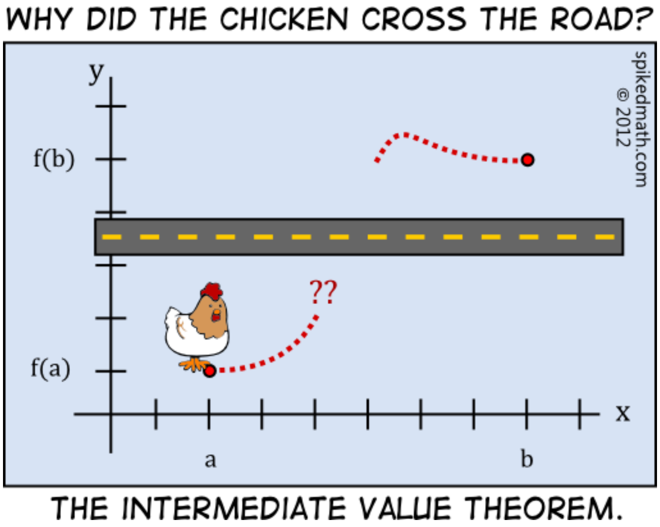
siis leidub argument $x_0 \in [a, b]$, et kehtib võrdus $f(x_0) = y_0$.



Allikas: Wikipedia

Märkus 6.7

Viimane teoreem ei ütle meile, kus asub see punkt x_0, et $f(x_0) = y_0$ ja ta ei ütle meile, kui palju selliseid erinevaid väärtusi x_* (et $f(x_*) = y_0$) üldse on. Küll aga on omaette väärtus ka antud infol, me teame, et selline (vähemalt üks) punkt x_0 on tõepoolest olemas.



Allikas: spikedmath.com

Märkus 6.8

Teoreem vahepealsetest väärtustest ütleb meile midagi väga elementaarset, infot, mida me enamasti teame niisamagi, ilma et peaksime sellele teoreemile mõtlema. Näiteks, kui te alustate paigalseisust autoga liikumist (kiirus on 0) ja jõuate kiiruseni 30 km/h, siis pidi vahepeal olema hetk, mil auto kiirus oli 10 km/h. Kui lapse temperatuur tõuseb 36.7 kraadi pealt 38.5 peale, siis pidi vahepeal olema hetk, mil lapse temperatuur oli 37.7 kraadi.

Veidi teistsugune on olukord võrrandite korral, kus me ei pruugi analoogilise järelduse peale niisama tulla, kuid sama omadus kehtib ka siin.

Näide 6.11 Lahendada võrrand

$$x^3 - 8x^2 + 15x = -1.$$

Algebra põhiteoreemi tõttu me teame, et sellel võrrandil on kolm erinevat lahendit (ei rohkem ega vähem). Leiame nendest ühe (või siis, anname idee, kuidas ligikaudu leida vähemalt ühte).

Võtame $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x + 1$. Algvõrrandi lahendamine taandub funktsiooni f nullkohtade leidmisele. Funktsioon f kui polünoom on pidev tervel reaalteljel ja seega pidev igas osalõigus $[a, b]$. Arvutame

$$f(-1) = -23, \quad f(0) = 1.$$

Teoreem vahepealsetest väärtustest ütleb meile, et antud funktsiooni korral peab lõigus $[-1, 0]$ leiduma punkt x_0, mille korral $f(x_0) = 0$. Nüüd saab jätkata lõigu poolitamise meetodiga. Leiame

$$f(-0.5) = -8.625.$$

Kuna $f(0)$ oli positiivne ja $f(-0.5)$ negatiivne, siis peab lõigus $[-0.5, 0]$ leiduma punkt x_0 nii, et $f(x_0) = 0$. Arvutame

$$f(-0.25) \approx -3.266.$$

Siit saame, et lõigus $[-0.25, 0]$ peab leiduma punkt x_0 nii, et $f(x_0) = 0$ jne. Nii võib leida, et $x_0 \approx -0.064434534$.

Kuna nullkohti leidub rohkem kui üks, siis peame teisi (arvatavasti) kuskilt mujalt otsima. Näiteks,

$$f(4) = -3, \quad f(5) = 1.$$

Teoreem vahepealsetest väärtustest ütleb meile, et antud funktsiooni korral peab lõigus $[4, 5]$ leiduma punkt x_*, mille korral $f(x_*) = 0$. Siin $f(4.5) = -2.375$, seega peame otsima lõigust $[4.5, 5]$ jne. Lõigu poolitamise meetod ei ole küll kiire koondumisega, kuid see-eest väga lihtsa ideega.

$\diamond \diamond \diamond$

Viited

[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[3] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross, 1997-98.

[4] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[5] V. Soomer. Matemaatiline analüüs. Tartu Riiklik Ülikool, 1988.

[6] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.