7 Funktsiooni tuletis

Sisukord

Kontrolltöö teemad

1. Tuletise mõiste, tema geomeetriline tähendus ja seos kiirusega.
2. Tuletise definitsiooni kasutamine lihtsamal juhul (näited 7.1, 7.2, 7.3, 7.5).
3. Funktsiooni puutujasirge tõusu ja võrrandi leidmine.
4. Diferentseerimise reeglid ja nende rakendamine (teoreem 7.2, näited 7.9, 7.10).
5. Liitfunktsiooni tuletise leidmine (teoreem 7.3, nn. *Chain Rule*, näited 7.11, 7.12).
6. Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletiste tabel (tuletisfunktsioonid). Üldiselt peaks oskama leida suvalise elementaarfunktsiooni tuletist.

Eksamiteemad

1. Tuletise mõiste ja definitsioon.
2. Tuletise definitsiooni kasutamine lihtsamal juhul (näited 7.1, 7.2, 7.3, 7.5).
3. Tuletise füüsikaline ja geomeetriline tähendus.
4. Teoreemide 7.1, 7.2, 7.3 sõnastus.

7.1 Keskmine kiirus ja hetkkiirus

Kui auto liigub ühtlase kiirusega, siis on auto liikumise keskmist kiirust väga lihtne arvutada:

$$\text{keskmine kiirus} = \frac{\text{läbitud teepikkus}}{\text{kulutatud aeg}}.$$

Definitsioon 7.1
Suhet

$$v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

nimetatakse materiaalse punkti liikumise keskmiseks kiiruseks.

Seega, kui auto liigub ühe tunniga 50 km, siis tema liikumise keskmine kiirus on $v_k = \frac{50}{1} = 50\,km/h$.

Tegelikkuses ei liigu auto tavaliselt kunagi pikemat ajavahemikku ühtlase kiirusega. Keskmine kiirus ei ütle meile mitte midagi selle kohta, kuidas auto võis liikuda näiteks 33. minutil. Teisalt, kui me tahame teada saada auto liikumise kiirust just nimelt hetkel 33 minutit 0 sekundit, siis kuidas seda teada võiks saada?

Üks võimalus on mõõta läbitud teepikkust ja kulunud aega järjest lühemal ajalõigul. Näiteks, 30 sekundit enne ja peale 33. minutit. Kuid sellisel juhul saame me teada ikkagi ainult auto liikumise keskmise kiiruse ühe minuti jooksul. See on ilmselt täpsem ja iseloomustab liikumist 33. minuti ümber paremini, kui keskmine kiirus ühe tunni jooksul, kuid jääb ikkagi ebatäpseks. Edasi võiksime mõõta läbitud teepikkust igal sekundil ... või koguni iga sajandik, tuhandik sekundil.

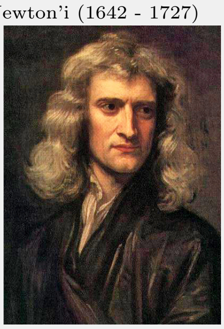
Ajavahemik Δt	$1\,h$	$1\,min$	$1\,sek$	$0.1\,sek$
Läbitud teepikkus Δs	$50\,km$	$1\,km$	$15\,m$	$1.3\,m$
Keskmine kiirus $\frac{\Delta s}{\Delta t}$	$50\,km/h$	$60\,km/h$	$54\,km/h$	$46.8\,km/h$

Selline idee auto puhul aitab ja praktikas see suuresti nii töötabki. Meil ei ole aga mõtet mõõta auto läbitud teepikkust näiteks miljard korda sekundis, tulemus oleks küll täpsem, kuid mõõtmiseks kulutame rohkem energiat ja saadud üleliigsete komakohtadega ei ole meil vähemalt spidomeetril midagi tarka peale hakata.

Kuidas on lood aga üldisemalt? Ajasammu tihendamine annab meile täpsema tulemuse, aga ega me hetkkiirust ennast ikkagi kätte ei saanud. Võtame näiteks kitarri C noodi (do), mis võngub 440 korda sekundis. Kui mõõdetav ajavahemik oleks sekund, siis näeksime kitarrikeelt pigem paigalseisvana. Nähtav valgus aga võngub 10^{15} korda sekundis, mis tähendab, et valguse jaoks peaks mõõdetav ajavahemik Δt olema vähemalt 10^{-15} sekundit...

Oma olemuselt jaguneb matemaatiline analüüs kahte suurde - sisuliselt väga erinevasse - valdkonda: diferentsiaalarvutus (muutumiskiiruse uurimine, lokaalne omadus) ja integraalarvutus (kogumuutuse uurimine, globaalne omadus). Alustame oma teekonda esimesest suurest valdkonnast.

Matemaatilise analüüsi (*Calculus*) loojateks peetakse inglise füüsikut ja matemaatikut Isaac Newton'i (1642 - 1727)



Allikas: Wikipedia

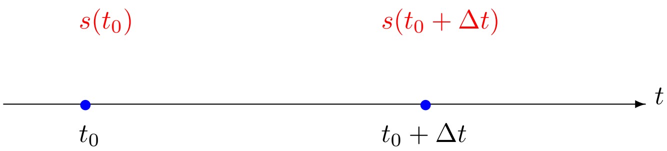
ja saksa matemaatikut ning filosoofi Gottfried Wilhelm Leibniz'i (1646 - 1716).

Allikas: Wikipedia

Nad töötasid teineteisest sõltumatult välja tuletisega seotud seadusi, tehteid, lisaks integraaliga seotud mõisteid. Tõsi, see kõik ei vastanud veel matemaatiliselt range teooria nõuetele, kuid andis siiski palju väga praktilisi tulemusi.

Niipalju siis reaalsest maailmast. Matemaatiliselt jääksid kõik need ajavahemikud ikkagi igavikeks (liiga pikaks). Küll aga oleme me varem tutvunud piirväärtuse mõistega, miks mitte lasta mõõdetaval ajavahemikul minna lõpmata väikseks? Tõsi, mõningad paradoksid viitavad, et võib juhtuda, et ajamoment ei saa reaalselt olla lõpmata väike, kuid mis siis sellest ... arvu 5 ennast ka looduses ju vastu ei jaluta, kuid abi on temast ikkagi päris palju.

Vaatleme näiteks keha liikumist kindla seaduse alusel. Olgu $s = s(t)$ selle keha poolt läbitud teepikkust väljendav seos (aja t funktsioon). Liikugu keha mingist hetkest t_0 edasi aja Δt võrra.



Siis saab funktsiooni $s = s(t)$ muudu (kui s on positiivne funktsioon, siis tema muut annab meile läbitud teepikkuse) arvutada järgmiselt:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

Definitsioon 7.2

Piirväärtust

$$v(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

nimetatakse keha hetkkiiruseks antud ajamomendil t.

Näide 7.1

Liikugu auto seaduse $s(t) = t^2$ alusel. Siis auto liikumise kiirus hetkel $t = 5$ on

$$\begin{aligned} v(5) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(5+\Delta t) - s(5)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{25 + 10\Delta t + (\Delta t)^2 - 25}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{10\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (10 + \Delta t) = 10\ \frac{\text{pikkusühikut}}{\text{ajaühikus}}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Märkus 7.1

Kiiruse mõistet saab kasutada ka teiste suuruste muutumise korral (keha soojenemise kiirus, aine lagunemise kiirus, keemilise reaktsiooni kiirus, aktsiahinna langemise kiirus, meeleolu muutumise kiirus jne).

Kui tähistada nähtuskäiku kirjeldav funktsioon $y = f(x)$, siis selle funktsiooni muudu Δy ja argumendi muudu Δx jagatise piirväärtus väljendab funktsiooni muutumise hetkkiirust argumendi x antud väärtusel:

$$v(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Newton'i ja Leibniz'i nimega on ajaloos seotud üks pikk vaidlus matemaatilise analüüsi "esmaavastaja" tiitli üle. Mõned Newton'i sõbrad süüdistasid Leibniz'i plagiaadis: Newton'i ideede varastamises ja oma nime all esitamises.

See oli suhteliselt segane vaidlus, millele ei ole tänaseni täit selgust toodud. Newton kasutas oma loodud mõisteid (näiteks *fluxion*) ja meetodeid (nn. voolavusteooria) raamatus "*The Method of Fluxions and Infinite Series*", mille ta sai valmis 1671. aastal, kuid mis avaldati alles pärast tema surma 1736. aastal.

Leibniz'i esimsed märkmed "*infinitesimals*" kohta on dateeritud aastast 1675, kuid ta ei avaldanud midagi enne 1684. aastat. Tuleb siinjuures mainida, et Newton ja Leibniz olid omavahel tihedas kirjavahetuses ja loomulikult arutasid ka üksteise ideid.

Sellest suurest ja ilmselt ka mõttetust vaidlusest kaotasid ilmselt rohkem inglise matemaatikud, samal aja kui Euroopa mandril jätkati rahulikult teooria arendamist.

Omaette teema oli veel teiste matemaatikute (näiteks George Berkeley) terav kriitika Newton'i ja Leibniz'i esitatud mõistete kohta. Igal juhul mõjutas toimunu Newtoni't niipalju, et oma kuulsamas teoses "Printsiibid" ta eriti matemaatilise analüüsi vahendeid ei kasutanud (kuigi ta oli tulemused ise varem nende abil tuletanud) ja valis "pehmema" variandina "geomeetria vahendid".

7.2 Tuletise definitsioon

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, $x \in X$. Anname argumendile x muudu Δx, nii et $(x + \Delta x) \in X$ ja vastav funktsiooni muut olgu

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Definitsioon 7.3

Kui eksisteerib piirväärtus (lõplik või lõpmatu)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{7.1}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f tuletiseks punktis x. Tähistame $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$.

Järeldus 7.1

Funktsiooni $y = f(x)$ tuletise arvutusvalem avaldub kujul

$$\mathbf{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}. \tag{7.2}$$

Newton lähtus ajas muutuvatest suurustest, nimetades neid voolavateks suurusteks ehk fluentideks (*fluens*). Nende muutumise hetkkiirusi nimetas ta fluksioonideks (*fluxus* - vool). Fluendi x fluksiooni tähistas ta $\dot{x}$ (vt. [7, 9]).

Kui võtta funktsiooni $y = x^2$ väike muut o, mis "voolab" nulli, siis

$$\frac{(x+o)^2 - x^2}{o} = 2x + o.$$

Seega suurus $2x + o$ "voolab" suuruseks $2x$.

Leibniz tähistas sellist väikest nulli minevat suurust tähisega dx (*differentia*, erinevus, vahe). Kui Newton mõtles tuletise all eelkõige seost füüsikaliste mõistetega (liikumiskiirus, läbitud vahemaa), siis Leibniz lähtus rohkem algebralistest sümbolitest ja tehetest.

Näide 7.2 Kui $f(x) = c = const$, siis $\Delta y = 0$ ja järelikult

$$f'(x) = c' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.3 Olgu $f(x) = 2x^2 - x$, siis

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - (2x^2 - x) = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \Delta x,$$

ja

$$[2x^2 - x]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} = 4x - 1 + \lim_{\Delta x \to 0} 2\Delta x = 4x - 1.$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.4 Olgu $f(x) = \sin(x)$, siis

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right),$$

ja piirväärtusest $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$ järeldub, et

$$[\sin(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos(x).$$

◇ ◇ ◇

Kui funktsioonil f on lõplik tuletis punktis x, siis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f\,'(x) = o(1), \quad \Delta x \to 0.$$

Seetõttu

$$\Delta y = f\,'(x)\Delta x + o(1)\Delta x, \quad \Delta x \to 0, \tag{7.3}$$

millest järeldub, et $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Oleme tõestanud järgmise teoreemi.

Teoreem 7.1

Iga punktis x lõplikku tuletist omav funktsioon on pidev selles punktis.

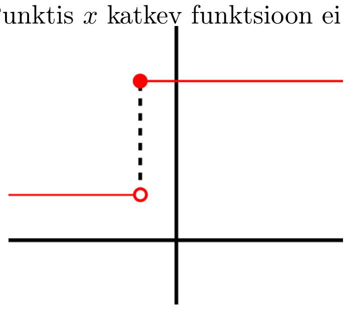
Olgu funktsioonil f lõplikud tuletised hulga X igas punktis x. Siis vastavus $x \to f\,'(x)$ määrab funktsiooni $f\,'$, mida nimetatakse funktsiooni f tuletisfunktsiooniks. Näiteks, funktsiooni $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ tuletisfunktsiooniks on sirge $y = 2x$.

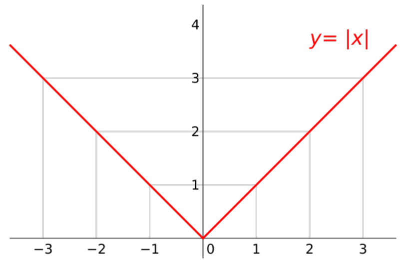
Definitsioon 7.4

Funktsiooni f tuletise leidmist nimetatakse selle funktsiooni diferentseerimiseks. Matemaatilise analüüsi osa, mis käsitleb tuletise leidmise reegleid, tuletise omadusi ja rakendusi, nimetatakse diferentsiaalarvutuseks.

Näide 7.5

Punktis x katkev funktsioon ei saa olla diferentseeruv.





Allikas: Wikipedia

Samuti ei ole funktsioon diferentseeruv nn. teravate nurkade korral. Näiteks $y = |x|$ on pidev, kuid ei ole diferentseeruv punktis $x = 0$. Siin vasakpoolne tuletis on

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = -1,$$

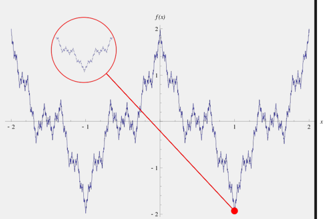
aga parempoolne tuletis

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = 1.$$

Seega ei leidu piirväärtust $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ja järelikult ka tuletist punktis 0.

◇ ◇ ◇

On olemas pidevaid funktsioone, millel ei leidu lõplikku tuletist mitte üheski punktis.



Allikas: Wikipedia

Üheks selliseks on Karl Weierstrass'i funktsioon (avaldati 1872. aastal), mille formaalne kuju on antud seosega

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

$$0 < a < 1, \quad b = 2k + 1 > 0,$$

$$a\,b > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

Seda tüüpi graafikuid võib näha ka aktsiaturgudel ja mujal, kus on tegemist juhuslike suurustega.

7.3 Tuletis kui kiirus

Oma sissejuhatavas tekstis vaatlesime keha keskmist liikumise kiirust ja hetkkiirust. Toome veel ühe näite tuletise tõlgendamise kohta füüsikas ([8]).

Ülesanne. Leida õhupalli ruumala muutumise kiirus $V'(r)$ raadiuse suhtes hetkel, kui $r = 20$ sentimeetrit. Vihje: õhupalli ruumala avaldub valemiga $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Näide 7.6

Olgu $Q = f(t)$ elektrihulk, mis läbib juhtme ristlõiget ajavahemiku $[0, t]$ jooksul. Siis keskmise voolutugevuse all mõistame suhet

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Voolutugevuse $I(t)$ ajahetkel t defineerime kui piirväärtuse

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t).$$

Seega on voolutugevus elektrihulga muutumise kiirus.

⋄ ⋄ ⋄

Ülesanne. Leida voolutugevuse I poolt tekitatud võimsuse P muutumise kiirus $P'(I)$ (ühik W/A) voolutugevuse suhtes, kui $P = 4.8\, I^2$ ja $I = 2.5$ amprit.

Märkus 7.2

Funktsiooni tuletise analoogsete rakenduste kohta võib tuua palju näiteid füüsikast, keemiast, bioloogiast jne. Üldiselt, mõistes liikumist kui mistahes nähtuse muutumist looduses, tehnikas, ühiskonnas jt, võime öelda, et funktsiooni f tuletis tähendab seaduse $y = f(x)$ alusel toimuva nähtuse kulgemise kiirust (intensiivsust).

Näide 7.7 Keemilisel reaktsioonil saadud aine hulk y grammides sõltub ajast t minutites järgmise valemi järgi

$$y = 0.6\, t^2.$$

Millise kiirusega kasvab ainehulk ajamomendil $t_0 = 10$ minutit? Võime kirjutada

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(10 + \Delta t) - y(10)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{0.6\,(10 + \Delta t)^2 - 0.6 \cdot 10^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 0.6\, \frac{100 + 20\,\Delta t + (\Delta x)^2 - 100}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 0.6\, \frac{20\,\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 0.6\,(20 + \Delta t) = 12\, g/min. \end{aligned}$$

Hetkel $t_0 = 10$ minutit kasvab ainehulk kiirusega 12 grammi minutis. See tähendab, et kui ajamomendist $t_0 = 10$ minutit alates kulgeks reaktsioon edasi ühtlaselt, siis tekiks igas minutis ainet juurde 12 grammi.

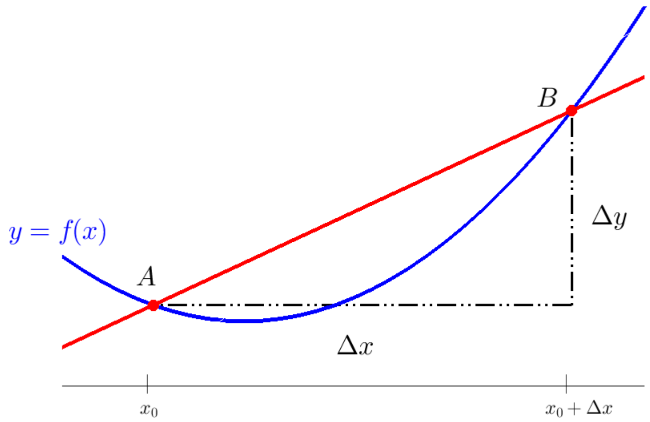
Leiame ka ainehulga kasvamise keskmise kiiruse esimese 10 minut jooksul. Selleks arvutame

$$v_k = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(10) - y(0)}{10} = \frac{60}{10} = 6\, g/min.$$

⋄ ⋄ ⋄

7.4 Tuletise geomeetriline tõlgendus

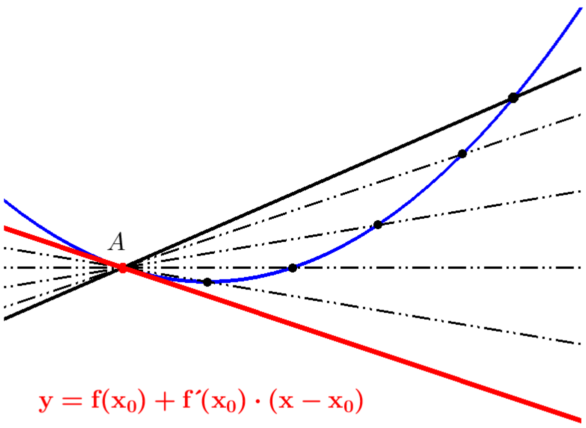
Vaatleme funktsiooni $y = f(x)$ graafikut. Võtame punktile $A(x_0, f(x_0))$ lisaks punkti $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.



Siis lõikaja AB tõusunurga tangens (ka lõikaja tõus) avaldub täisnurkse kolmnurga seostest valemiga

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Joone puutujaks punktis A nimetatakse teatavasti sirget, mis on lõikaja AB piirseisuks, kui punkt B läheneb punktile A mööda joont $y = f(x)$.



Seega, kui θ on joone puutuja tõusunurk, saame

$$\tan(\theta) = \lim_{B \to A} \tan(\alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f\,'(x_0).$$

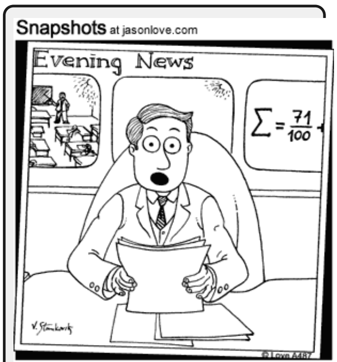
Siinjuures selgituseks, kuna tangens on pidev oma määramispiirkonnas, siis protsessist $\alpha \to \theta$ järeldub protsess $\tan(\alpha) \to \tan(\theta)$.

Märkus 7.3

Joone $y = f(x)$ tuletis $f'(x_0)$ on selle joone puutuja tõus punktis $A(x_0, f(x_0))$ ja puutuja võrrand avaldub järgmiselt:

$$\mathbf{y = f(x_0) + f\,'(x_0) \cdot (x - x_0)}. \tag{7.4}$$

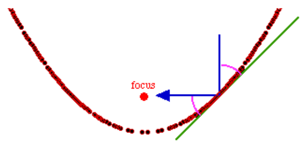
"Students nowadays are so clueless", the math professor complains to a colleague. "Yesterday, a student came to my office hours and wanted to know if General Calculus was a Roman war hero..."



"Of students surveyed, 64% prefer English and 32% prefer math. The fact that these numbers do not add up to 100 may help explain why."

Näide 7.8

Päikese reflektor on parapooli $y = \frac{x^2}{4}$ kujuga. Parabooli fookus asub punktis $F(0,1)$. Selgitada, kas vertikaalsed valguskiired läbivad pärast punktis $x = 2$ parabooli siseseinalt peegeldumist reflektori fookuse.



Kuna parabooli puutuja tõus suvalises punktis on $x/2$ ($y' = x/2$), siis märkame, et selle tõus punktis $x = 2$ võrdub ühega (ehk puutuja tõuseb $45°$ nurga all). Sel juhul tasub tähele panna, et vertikaalne valguskiir peegeldub vertikaalse telje suhtes täisnurga all (kuna kiire ja puutuja vaheline nurk omakorda on samuti $45°$). Viimane tähendab aga seda, et peegeldunud kiir on paralleelne x-teljega ja see läbib fookust $F(0,1)$, kuna kõrgus punktis $x = 2$ on $f(2) = \frac{2^2}{4} = 1$.

Ülesanne. Leida joone

$$y = 3x^2 - 4x$$

puutujavõrrand suvalises punktis x.

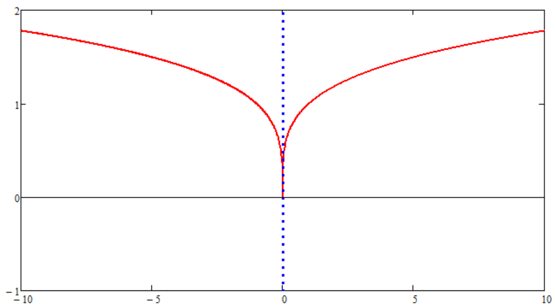
Leiame parabooli puutuja võrrandi punktis $x = 2$,

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x-2) \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 + 1 \cdot (x-2) = x - 1.$$

⋄ ⋄ ⋄

Märkus 7.4

Juhul, kui $|f'(x_0)| = \infty$, on puutuja tõusunurk $\alpha = \frac{\pi}{2}$, s.t. puutuja punktis $A = (x_0, f(x_0))$ on risti x-teljega (puutujaks on sirge võrrand $x = x_0$). Kui funktsioonil f on punktis x_0 märgilt erinevad lõpmatud ühepoolsed tuletised, siis on funktsiooni f graafikul kohal x_0 ikkagi üksainus puutuja.



7.5 Diferentseerimise reeglid

Teoreem 7.2

Kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ eksisteerivad lõplikud tuletised punktis x, siis ka funktsioonidel $u + v$, $u - v$, $u \cdot v$ ja $\frac{u}{v}$ eksisteerivad lõplikud tuletised punktis x, kusjuures

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,
3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = const$,
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$.

Tõestus. Toodud omadused tulenevad piirväärtuse tehetega seotud omadustest. Teeme tõestuse korrutamise reegli kohta, teised on analoogilised (vt. nt. [6, 8]). Eelduse järgi leiduvad lõplikud piirväärtused $u'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ ja $v'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$. Kirjutame

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[v(x+\Delta x)\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u(x)\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

Siinjuures arvestasime, et $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$. Viimane tuleneb sellest, et funktsioon v on diferentseeruv, järelikult ka pidev punktis x ja sel juhul

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [v(x+\Delta x) - v(x)] = 0.$$

□

Ülesanne. Ilma sulge lahti korrutamata, leidke funktsiooni

$$f(x) = (3 - 2x^2) \cdot (x^4 - 1)$$

tuletis.

Ülesanne. Leidke funktsiooni

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^4 - 1}$$

tuletis.

Näide 7.9

Leiame funktsioonide $u = x^2 + 2$ ja $v = 3 - 2x$ korrutise $u \cdot v$ tuletise muutuja x-järgi. Esiteks $u' = 2x$ ja $v' = -2$. Kirjutame

$$(u \cdot v)' = 2x \cdot (3 - 2x) + (x^2 + 2) \cdot (-2) = -6x^2 + 6x - 4.$$

Kontrolliks kirjutame lahti korrutise

$$u \cdot v = (x^2 + 2) \cdot (3 - 2x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x + 6.$$

Leides siit x-järgi tuletise on lihtne veenduda, et saame sama tulemuse.

◇ ◇ ◇

Näide 7.10

Õõnessilindris olev rõhk S avaldub pinge T, välise diameetrid D ja sisemise diameetri d kaudu valemiga

$$S = \frac{16\, D\, T}{\pi\, (D^4 - d^4)}.$$

Leida rõhu S muutumise kiirus $S'(D)$ välise diameetrid D järgi.

Kirjutame jagatise tuletise leidmise reegli abil

$$\frac{dS}{dD} = \frac{16\, T\, \pi\, (D^4 - d^4) - 16\, D\, T\, \pi\, (4D^3)}{\pi^2\, (D^4 - d^4)^2} = -\frac{16\, T}{\pi} \frac{3D^4 + d^4}{(D^4 - d^4)^2}.$$

◇ ◇ ◇

7.6 Liitfunktsiooni tuletis

Teoreem 7.3

Kui funktsioonidel $y = f(u)$ ja $u = \varphi(x)$ eksisteerivad lõplikud tuletised vastavalt punktides u ja x, siis ka liitfunktsioonil $y = f[\varphi(x)]$ eksisteerib lõplik tuletis punktis x, kusjuures

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}) \cdot \varphi'(\mathbf{x}), \tag{7.5}$$

või siis Leibniz'i tähistuses

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{du}} \cdot \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}. \tag{7.6}$$

Tõestus. Tõestused leiab õpikutest [6, 8]. Siinjuures toome ära põhiidee Leibniz'i tähistuses (sedasi on valemit lihtne tuletada, kuigi see ei ole matemaatiliselt päris korrektne). Esiteks, kui $\Delta u \neq 0$, siis

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Kuna $u' = \varphi'(x)$ leidub ja on lõplik, siis φ on pidev punktis x ja järelikult $\Delta x \to 0$ korral ka $\Delta u \to 0$. Eelduse järgi leidub lõplik tuletis $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$, seega

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Keerulisem on see juhtum, kus $\Delta u = 0$. Selle tõestus võtaks palju ruumi ja aega, ning ei ole siinkohal meile oluline. □

Ülesanne. Leidke funktsiooni

$$f(x) = (5x + 2)^4$$

tuletis.

Ülesanne. Leidke funktsiooni

$$f(x) = 5x \cdot (2x + 7)^3$$

tuletis.

Ülesanne. Leidke funktsiooni

$$f(x) = \sqrt[3]{4 - 9x}$$

tuletis.

Ülesanne. Leidke funktsiooni

$$f(x) = \frac{3}{(6x + 5)^4}$$

tuletis.

Märkus 7.5

Liitfunktsiooni tuletis avaldub kui välise funktsiooni tuletis sisemise funktsiooni järgi korda sisemise funktsiooni tuletis.

Näide 7.11

Leiame $f'(x)$, kui $f(x) = (2x + 3)^2$. Võime võtta $f(u) = u^2$, kus $u(x) = 2x + 3$. Seega

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = 2u \cdot 2 = 4(2x + 3).$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.12

Leiame $f'(x)$, kui $f(x) = \sin(5x + 1)$. Võime võtta $f(u) = \sin(u)$, kus $u(x) = 5x + 1$. Seega

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = \cos(u) \cdot 5 = 5\cos(5x + 1).$$

◇ ◇ ◇

7.7 Pöördfunktsiooni tuletis *

Pöördfunktsiooni tuletise leidmise näiteid vaatame praktikumis. See on kasulik teema, kuid eksamil seda eraldi ei küsita.

Teoreem 7.4

Kui funktsioonil $y = f(x)$ on olemas pöördfunktsioon $x = \varphi(y)$ piirkonnas X ja eksisteerib lõplik tuletis $\varphi'(y) \neq 0$, siis eksisteerib lõplik tuletis $f'(x)$ ning kehtib valem

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\varphi'(\mathbf{y})}. \tag{7.7}$$

Tõestus. Kuna leidub lõplik tuletis $\varphi'(y)$, siis φ on pidev punktis y ja järelikult $\Delta\varphi = \Delta x \to 0$, kui $\Delta y \to 0$. Siinjuures funktsioonide üksühesusest tuleneb, et $\Delta y \neq 0$, kui $\Delta x \neq 0$. Järelikult võime kirjutada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

□

Näide 7.13

Funktsioonid e^x ja $\ln(x)$ on teineteise pöördfunktsioonid $(x > 0)$, s.t.

$$y = \ln(x), \quad x = e^y.$$

Leiame $[\ln(x)]'$, arvestades, et $[e^y]' = e^y$. Viimase teoreemi järgi

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.14

Funktsioonid x^2 ja $\sqrt{x}$ on teineteise pöördfunktsioonid piirkonnas $[0, \infty)$,

$$x = y^2, \quad y = \sqrt{x}.$$

Leiame $[\sqrt{x}]'$, arvestades, et $[y^2]' = 2y$. Viimase teoreemi järgi

$$[\sqrt{x}]' = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.15

Funktsioonid $\sin(x)$ ja $\arcsin(x)$ on teineteise pöördfunktsioonid, s.t.

$$x = \sin(y), \quad y = \arcsin(x).$$

Leiame $[\arcsin(x)]'$, arvestades, et $[\sin(y)]' = \cos(y)$. Viimase teoreemi järgi

$$[\arcsin(x)]' = \frac{1}{(\sin(y))'} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

◇ ◇ ◇

7.8 Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

Mõned tulemused oleme tõestanud eelnevalt. Lisaks leiab tõestusi õpikust [8].

Konstandi tuletis on alati null, $(Const)' = 0$.

Astmefunktsiooni tuletis.

$$(\mathbf{x}^{\alpha})' = \alpha \cdot \mathbf{x}^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0.$$

Toome eraldi välja järgmised:

$$x' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \sqrt{x}\,' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Eksponentfunktsioonid ja logaritmfunktsioonid.

$$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

Trigonomeetrilised funktsioonid.

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid.

$$(\text{arcsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\text{arccos}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\text{arctan}x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\text{arccot}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Trigonomeetriliste funktsioonide (nt $\sin(x)$ ja $\cos(x)$) korral on oluline, et toodud tuletisfunktsioonid on antud juhul, kui argumenti x mõõdetakse radiaanides.

Kui argumenti x mõõdetakse kraadides, siis

$$x^\circ = \frac{\pi\, x}{180}\, rad.$$

Sel juhul liitfunktsiooni tuletise reeglist saame, et

$$\frac{d\sin(x^\circ)}{dx} = \left(\sin\left(\frac{\pi\, x}{180}\right)\right)' =$$

$$= \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi\, x}{180}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{180}\cos\left(x^\circ\right).$$

Siit ka põhjus, miks trigonomeetriliste funktsioonide korral opereeritakse kõikides tehetes enamasti radiaanide abil. Sedasi on lihtsam.

Märkus 7.6

Kõikidel põhilistel elementaarfunktsioonidel eksisteerivad tuletised kogu määramispiirkonnas, välja arvatud funktsioonid $y = \arcsin(x)$, $y = \arccos(x)$ (määramispiirkonna otspunktides $x = -1$ ja $x = 1$ on lõpmatud tuletised) ja funktsioon $y = x^\alpha$, kus $0 < \alpha < 1$ (punktis $x = 0$ on lõpmatu tuletis või lõpmatud erimärgilised ühepoolsed tuletised).

Teades põhiliste elementaarfunktsioonide tuletiste leidmise valemeid, saab leida mistahes elementaarfunktsiooni tuletise.

Tuletame meelde, et suvaline elementaarfunktsioon saadakse põhilistest elementaarfunktsioonidest aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel, nende operatsioonidega seotud diferentseerimisreeglid on meil aga teada ([8]).

Hüperboolsed funktsioonid.

$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x, \quad (\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x, \quad (\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}, \quad (\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x},$$

$$(\mathrm{arsh}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad (\mathrm{arch}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(\mathrm{arth}x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\mathrm{arcth}x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Two polynomials walk into a bar. The bartender, a derivative, asks them "Can I take you order?" The polynomials run out screaming "Help! The bartender threatened to kill me!" ("order" on siinjuures ka polünoomi järk, ruutpolünoom on teist järku, kuuppolünoom kolmandat jne. Seda nalja ei saa eesti keeles hästi edasi anda.)

Viited

[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] R. Flood, R. Wilson. Kuulsad matemaatikud. Valgus, 2014.

[3] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[4] D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, P. F. Lock, D. E. Flath. Applied Calculus. Wiley, 2010.

[5] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross, 1997-98.

[6] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[7] I. Piir. Füüsika ajalugu. Ilmamaa, 2013.

[8] V. Soomer. Matemaatiline analüüs. Tartu Riiklik Ülikool, 1988.

[9] I. Stewart. 17 Equations that Changed the World. Profile Books, 2013.

[10] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.

[11] A. J. Washington. Basic Technical Mathematics with Calculus. 10th ed. Pearson, 2014.