8 Funktsiooni diferentsiaal ja selle rakendused

Sisukord

Kontrolltöö teemad

1. Funktsiooni diferentsiaali mõiste, definitsioon ja graafiline esitus (näide 8.2).
2. Funktsiooni muudu ja maksimaalse vea ligikaudne arvutamine (näited 8.3 - 8.7).
3. Funktsiooni ligikaudne arvutamine, kasutades lineariseerimist (näited 8.8 - 8.10).
4. Diferentsiaali leidmise reeglid.

Eksamiteemad

1. Mida tähendab kõrgemat järku väike suurus.
2. Diferentseeruva funktsiooni mõiste. Piisab teoreemist 8.1 ja märkusest 8.1. Definitsiooni 8.2 teadmine ei ole nõutav.
3. Funktsiooni diferentsiaali mõiste, definitsioon ja graafiline esitus.
4. Funktsiooni muudu ja maksimaalse vea ligikaudne arvutamine.
5. Funktsiooni ligikaudne arvutamine, kasutades lineariseerimist.
6. Diferentsiaali leidmise reeglid.

8.1 Diferentseeruv funktsioon

Varem tõime sisse diferentseerimise mõiste, viimane oli teatavasti funktsiooni tuletise leidmine. Käesolevas punktis läheneme diferentseeruvale funktsioonile veidi teise nurga alt.

Viimane on oluline mõningates teoreetilistes valdkondades, kus oluline on funktsiooni diferentseeruvus kui eraldi omadus (mille selgitamiseks ei ole alati tuletist ennast vaja leida).

Definitsioon 8.1

Kui piirprotsessis $x \to a$ lõpmata väikeste funktsioonide $\alpha = \alpha(x)$ ja $\beta = \beta(x)$ korral

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

siis ütleme, et α on piirprotsessis $x \to a$ kõrgemat järku lõpmata väike kui β. Kirjutame $\alpha = o(\beta)$ (α on väike o β).

Lihtsustatult võib öelda, et kõrgemat järku lõpmata väike suurus α teise suuruse β suhtes tähendab, et α läheb nulli oluliselt kiiremini, kui β.

Näide 8.1

Protsessis $x \to 0$ funktsioon $\alpha(x) = x^2$ on kõrgemat järku lõpmata väike funktsiooni $\beta(x) = x$ suhtes, kuna

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0.$$

⋄ ⋄ ⋄

Definitsioon 8.2

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse diferentseeruvaks punktis x, kui selle funktsiooni muut

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

avaldub kujul

$$\Delta y = A(x) \cdot \Delta x + \alpha, \quad \alpha = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{8.1}$$

Siin funktsioon $A = A(x)$ sõltub punktist x, ei sõltu aga Δx valikust.

Märkus 8.1

Funktsiooni diferentseerumine punktis x tähendab ühtlasi seda, et tema graafikul on punktis x olemas puutuja, mis ei ole risti x-teljega (puutuja võrrand oli teatavasti $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, mis lühemalt näeb välja kui $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$).

Osutub, et funktsiooni diferentseeruvus (punktis x) on samaväärne selle funktsiooni lõpliku tuletise olemasoluga punktis x.

Teoreem 8.1

[8]. Funktsioon $y = f(x)$ on diferentseeruv punktis x parajasti siis, kui eksisteerib lõplik tuletis $f'(x)$.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu funktsioon f diferentseeruv punktis x, s.t. iga $\Delta x \neq 0$ puhul võime seose (8.1) kirjutada kujul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x) + \frac{\alpha}{\Delta x}, \quad \alpha = o(\Delta x).$$

Kui nüüd $\Delta x \to 0$, siis seose $\alpha = o(\Delta x)$ põhjal kehtib $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha}{\Delta x} = 0$, mistõttu eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x).$$

Tuletise definitsiooni põhjal $f'(x) = A(x)$.

Piisavus. Oletame, et eksisteerib lõplik tuletis $f'(x)$, s.t. eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Viimane on samaväärne tingimusega

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = o(1), \quad \Delta x \to 0.$$

Seega võime kirjutada, et

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(1)\Delta x = f'(x)\Delta x + \alpha,$$

kus $\alpha = o(1)\Delta x = o(\Delta x)$, kui $\Delta x \to 0$, mis tähendabki, et funktsiooni f on diferentseeruv kohal x. □

8.2 Funktsiooni diferentsiaal

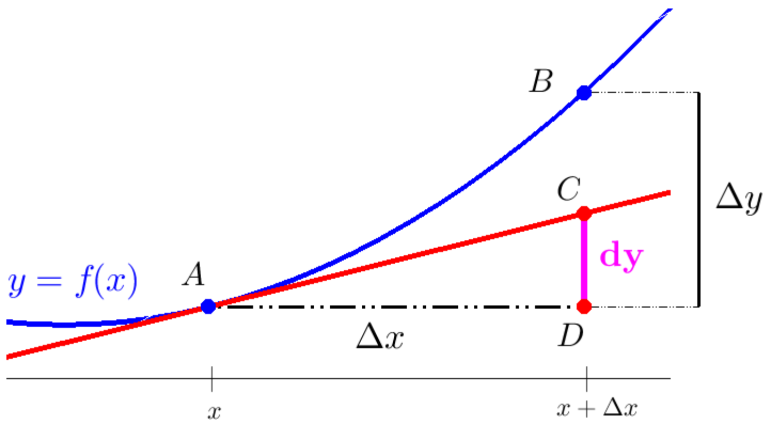
Definitsioon 8.3

Punktis x diferentseeruva funktsiooni $y = f(x)$ muudu Δy peaosa

$$f'(x) \cdot \Delta x \tag{8.2}$$

nimetatakse selle funktsiooni diferentsiaaliks punktis x. Tähistame dy või $df(x)$, seega

$$\mathbf{dy = f'(x) \cdot \Delta x.} \tag{8.3}$$



Punktis A on tõmmatud funktsiooni $y = f(x)$ puutuja.

Funktsiooni muut on lõigu BD pikkus ja diferentsiaal on lõigu CD pikkus.

Diferentsiaali dy arvutamise valemi võib tuletada kolmnurga ACD tõusunurga tangensi valemist $\tan \alpha = \frac{dy}{\Delta x}$, arvestades veel, et $\tan \alpha = f'(x)$.

Märkus 8.2

Olgu $y = f(x) = x$, siis saame

$$dy = dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Argumendi diferentsiaal võrdub argumendi muuduga. Seega võime kirjutada $dx = \Delta x$ ja üldise funktsiooni $y = f(x)$ korral

$$\mathbf{dy = f'(x) \cdot dx}. \tag{8.4}$$

Jooniselt võib tähele panna, et mida väiksem on argumendi muut $\Delta x = dx$, seda lähedasemad on funktsiooni muudu Δy ja diferentsiaali dy väärtused. Praktikas kasutatakse ligikaudset võrdust $\Delta y \approx dy$, kui dx on küllalt väike.

Märkus 8.3

Võrduse $dy = f'(x) \cdot dx$ jagamisel suurusega dx saame

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \tag{8.5}$$

s.t. **diferentseeruva** funktsiooni tuletist saab praktikas vaadelda kui selle funktsiooni diferentsiaali ja argumendi diferentsiaali suhet.

Näide 8.2 Leiame funktsiooni $f(x) = 3\,x^2 + 4\,x$ diferentsiaali $df(x)$ väärtuse punktis $x = 2$ argumendi muudu $\Delta x = dx = 0.1$ korral,

$$df(x) = f'(x) \cdot dx = (6\,x + 4) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad df(2) = (12 + 4) \cdot 0.1 = 1.6.$$

Funktsiooni muut Δf ise on aga

$$\Delta f = f(2.1) - f(2) = 21.63 - 20 = 1.63.$$

Kui asendaksime muudu Δf diferentsiaaliga $df(2)$, siis teeksime arvutustes vea 0.03. Antud juhul oli diferentsiaali arvutuslikult lihtsam leida kui funktsiooni muutu.

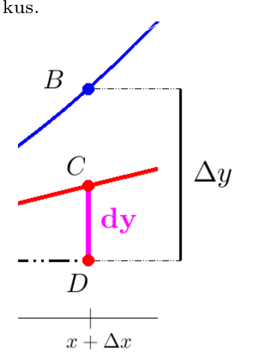
◇ ◇ ◇

8.3 Funktsiooni muudu ligikaudne arvutamine

Kui Δx on küllalt väike, võime funktsiooni $y = f(x)$ muudu Δy asemel leida funktsiooni f diferentsiaali dy,

$$\mathbf{\Delta y \approx dy}. \tag{8.6}$$

Muudu asendamisel diferentsiaaliga teeme vea, mille suurus on lõigu BC pikkus.



Näide 8.3 Te istute autos, kus spidomeeter näitab kiiruseks 72 km/h. Umbes, kui pika teekonna läbib see auto järgmise sekundi jooksul?

Kiireks arvutamiseks saame kasutada ligikaudset võrdust $\Delta y \approx dy$. Arvestades, et auto keskmine kiirus on teepikkus jagatud läbitud ajavahemik ja hetkkiirus on teepikkuse tuletis aja järgi, siis

$$\Delta s \approx ds = s'(t) \cdot dt.$$

Meie andmete põhjal läbib auto järgmise sekundi jooksul umbes

$$\Delta s \approx 72 \frac{km}{h} \cdot 1\, sek = \frac{72 \cdot 1000\, m}{3600\, sek} \cdot 1\, sek = \frac{72}{3.6}\, m = 20\, m.$$

Viimane arvutus on kaunis täpne, kui auto liikus enam-vähem ühtlase kiirusega. Paneme tähele, et antud juhul me ei pea teadma auto liikumise seadust $s = s(t)$ (funktsionaalset sõltuvust) ennast.

◇ ◇ ◇

Meie joonistel on argumendi diferentsiaal võetud küllalt suur, seda sellepärast, et joonis oleks jälgitav. Samas võime näha, et muudu asendamisel diferentsiaaliga peab dx olema päris väike.

Miks sellist asendust üldse teha? Osutub, et mõningatel juhtudel on diferentsiaali lihtsam arvutada ja ka programmeerida (kuna piisab puutujasirge võrrandist). Näiteks polünoomide korral tuletis vähendab polünoomi astet ja arvutusi on ka ilma arvutita lihtsam teha (arvutiga arvutades ei oleks seda niiväga vaja).

Näide 8.4 Kui eelmine näide oli pisut triviaalne, siis arendame seda näidet edasi. Firma toodab ninasarvikutele maiust, kusjuures x maiuse tootmise kasum on leitav funktsiooni

$$P(x) = -0.004\, x^3 + 10\, x^2 - 1000$$

kaudu. Kui suur oleks lisakasum, kui plaanitud 100 maiuse asemel toodekse 1 rohkem, s.t. 101?

Võib leida, et $P(101) - P(100) = 1888.796$, kuid viimane sisaldab endas opereerimist suurte arvudega. Arvestades, et

$$\Delta P(100) = P(101) - P(100) \approx dP(100) = P'(100) \cdot 1,$$

siis võime leida

$$\Delta P \approx (-0.012\, x^2 + 20\, x)\Big|_{x=100} = -120 + 2000 = 1880.$$

Erinevus täpse ja ligikaudse vastuse vahel on u. 89 ühikut, mis võrreldes arvuga 1889 endaga on küllalt väike.

◇ ◇ ◇

Ülesandest 8.4 saame ühe tuletise rakenduse majanduses.

Kui toodetakse x toodet, siis 1 toote juurde tootmisel on lisakasum ligikaudu võrdne kasumifunktsiooni $P(x)$ tuletisega kohal x (*Marginal Profit*). Analoogiliselt, kui toodetakse x toodet, siis 1 toote juurde tootmisel on lisakulu ligikaudu võrdne kulufunktsiooni $C(x)$ tuletisega kohal x (*Marginal Cost*). See omadus laieneb ka teistele mõistetele, kus argumendi muut Δx on võrdne ühe ühikuga.

Näiteks, kui maja ruutmeetri maksumus on arvutatav funktsiooni $f(A)$ abil (A on ruutmeetrite arv), siis kavandatud A ruutmeetri asemel 1 lisamine läheb umbes maksma $f'(A)$ rahaühikut.

Näide 8.5 Toome nüüd ühe klassikalise diferentsiaali kasutamise näite. Ringi raadiust r suurendatakse 10 ühikult 10.15 ühikule. Umbes kui palju suureneb ringi pindala $S = S(r)$?

Loomulikult saab siin arvutada täpselt,

$$\Delta S = \pi \cdot 10.15^2 - \pi \cdot 10^2 = 103.023 \cdot \pi - 100 \cdot \pi = 3.023 \cdot \pi.$$

Teisalt, kasutades diferentsiaali

$$\Delta S \approx dS = (\pi \cdot r^2)' \cdot dr = 2\pi \cdot 10 \cdot 0.15 = 3 \cdot \pi.$$

Viga on ainult 0.023 ruutühikut, kusjuures diferentsiaali leidmine oli oluliselt lihtsam.

◇ ◇ ◇

Ülesanne. Leida funktsiooni $y = x^3 - 2x$ muut ja diferentsiaal, kui $x = 3$ ja $\Delta x = -0.1$.

Ligikaudse arvutamise kasulikkus tuleb veel paremini välja ruumala muutumise ülesannetes.

8.4 Ligikaudne maksimaalse vea leidmine

Vaatleme olukorda, kus suurus x saadakse vahetult mõõtmise teel, suurus y aga arvutatakse valemist $y = f(x)$.

Olgu Δx suuruse x mõõtmisel tekkinud viga. Siis suuruse y viga on lihtsalt funktsiooni y muut $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$.

Tavaliselt on meil teada mitte Δx ise, vaid suuruse x maksimaalne absoluutne viga δx, s.t. teame, et $|\Delta x| \leq \delta x$. Siis aga võime kirjutada

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x) \cdot \Delta x| \leq |f'(x)| \cdot \delta x.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ ligikaudne maksimaalne absoluutne viga δy on leitav valemiga

$$\delta \mathbf{y} = |\mathbf{f}'(\mathbf{x})| \cdot \delta \mathbf{x}, \tag{8.7}$$

kus δx on suuruse x maksimaalne absoluutne viga.

Näide 8.6 Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaateti mõõtmisel saadi kaatetite pikkuseks $a = 5.630 \pm 0.001$ cm, ([8]). Kui täpselt saab selle põhjal arvutada kolmnurga pindala?

Et otsitav pindala $S = \frac{1}{2}a^2$, siis $S'(a) = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$ ja

$$|\Delta S| \approx |dS| \leq |S'(a)| \cdot \delta a = 5.630 \cdot 0.001 = 0.00563 \approx 0.006\, cm^2.$$

◇ ◇ ◇

Näide 8.7 Hõbedast kuubi serv a mõõdeti 3.5 cm. Selle väärtuse abil arvutati kuubi ruumala $V = a^3$ (hõbeda kulu). Hiljem selgus, et mõõtmistulemus erines tegelikkusest ± 0.02 cm. Kui suur viga tehti hõbeda kulu arvestamisel?

Ülesanne. Erinevate kuupide servi mõõdeti täpsusega $a = 3.8 \pm 0.03$ cm. Leida kuubi välispinna kogupindala $S = S(a)$ arvutamisel tehtud maksimaalne absoluutne ja suhteline viga.

Leiame ligikaudu

$$|\Delta V| \approx |dV| = |V'(a) \cdot da| \leq |3 \cdot a^2| \cdot 0.02 = 0.06 \cdot 3.5^2 = 0.735\, cm^3.$$

Viimast nimetatakse ka absoluutseks veaks. Tavaliselt huvitab meid lisaks viga protsentides. Leiame suhtelised vead (kasutame siin ainult positiivseid väärtusi). Esiteks kuubi külje mõõtmisel tehtud suhteline viga

$$\frac{da}{a} = \frac{0.02}{3.5} \approx 0.57\,\%$$

ja ruumala arvutamisel tehtud (ligikaudne) suhteline viga

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{3 \cdot a^2 \cdot 0.02}{a^3} = \frac{0.06}{3.5} \approx 1.71\,\%.$$

◇ ◇ ◇

8.5 Funktsiooni väärtuste ligikaudne arvutamine

Olgu funktsioon f punktis x_0 diferentseeruv funktsioon. Siis

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

mistõttu võime kirjutada, et

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

ehk

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \tag{8.8}$$

Paneme tähele, et võrduse paremal pool asub tegelikult funktsiooni f puutuja võrrand punktis $x = x_0$.

Definitsioon 8.4

Valemi

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{8.9}$$

ehk ka

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) \tag{8.10}$$

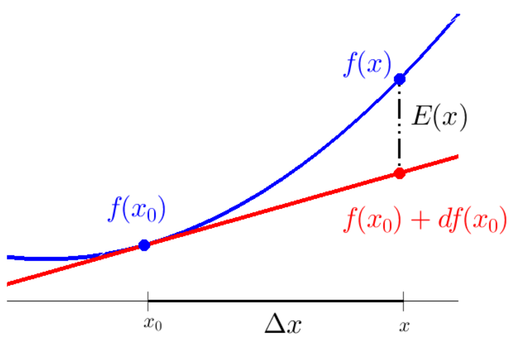
kasutamist nimetatakse ka funktsiooni f lineaarseks lähendamiseks punktis x_0 (kuna $f(x_0 + \Delta x)$ väärtus arvutatakse lineaarse sirge - funktsiooni f puutuja - peal).

Viimane valem (8.9) võimaldab ligikaudu arvutada

$$f(x_0 + \Delta x)$$

väärtuse, kui x_0 on selline, et väärtused $f(x_0)$ ja $f'(x_0)$ on teada ja Δx on küllalt väike (kusjuures funktsiooni f täpset avaldist ei olegi vaja teada). Seejuures on valem (8.9) seda täpsem, mida väiksem on Δx.

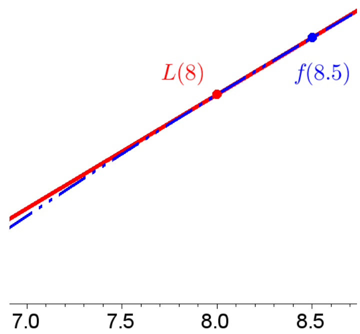
Seejuures tehakse arvutamisel viga $E(x)$ (vt. joonis).



Näide 8.8 Arvutame ligikaudu $\sqrt[3]{8.5}$. Antud juhul võime võtta

$$f(x) = x^{1/3}, \quad x_0 = 8, \quad \Delta x = 0.5.$$

Silma järgi on graafikult isegi raske eristada puutuja ja funktsiooni väärtusi.



Siis $f(x_0) = 2$ ja

$$f'(x_0) = \frac{1}{3}x_0^{-2/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

ja valemi (8.9) põhjal

$$\sqrt[3]{8.5} \approx f(8) + f'(8) \cdot 0.5 = 2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{24} = 2.04166\ldots.$$

Arvutiga leitud väärtus on $\sqrt[3]{8.5} \approx 2.04082755$.

◇ ◇ ◇

Näide 8.9 Arvutame ligikaudu $f(0.005)$, kui

$$f(x) = x^{21} + 5\,x^9 - 8\,x + e^x + 7.$$

Antud juhul võime võtta

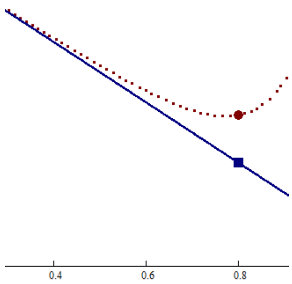
$$x_0 = 0, \quad \Delta x = 0.005.$$

Siis $f(x_0) = 8$ ja $f'(x_0) = 21\,x_0^{20} + 45\,x^8 - 8 + e^{x_0} = -7$ ja valemi (8.9) põhjal

$$f(x_0) = 8 + (-7) \cdot (0.005) = 7.965.$$

Arvutiga leitud täpsem väärtus on $f(0.005) \approx 7.96501252$.
Kui siinjuures Δx oleks palju suurem, näiteks $\Delta x = 0.8$, siis arvutus

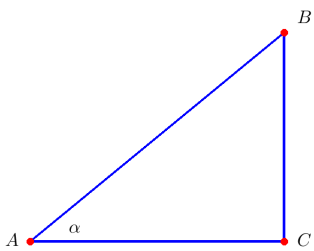
$$f(0.8) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0.5 = 8 + (-7) \cdot (0.8) = 8 - 5.6 = 2.4,$$



oleks juba oluliselt ebatäpsem. Arvutiga leitud väärtus on $f(0.8) \approx 3.50585294$.

◇ ◇ ◇

Näide 8.10 Snaiper sihib maapinnal kuulipildujast 100 m kaugusel olevat vaenlase punkrit. Kui snaiper keerab 5° kraadi kuulipilduja toru horisontaalsendist üles poole, siis kui kõrgele punkri seinal võib ta tabada?



Kui snaiper on punktis A, siis $\tan(\alpha) = \frac{|BC|}{|AC|}$. Siit $|BC| = \tan(\alpha) \cdot |AC|$. Tähistame kõrguse h ja kirjutame viimase funktsiooni kujul,

$$h(\alpha) = 100 \cdot \tan(\alpha).$$

Märgime, et $5° = \frac{\pi}{36}$ radiaani. Arvutiga on lihtne leida vastust $h(\pi/36) = 100 \cdot \tan(\pi/36) \approx 8.75$ meetrit, aga kui vaenlane on teie arvuti just pilbasteks tulistanud, siis võime võtta

$$\alpha_0 = 0, \quad h'(\alpha) = 100 \cdot \frac{d(\tan(\alpha))}{d\alpha} = \frac{100}{\cos^2 \alpha}.$$

Kuna $\cos(0) = 1$, siis $h'(0) = 100$ ja

$$h(\pi/36) \approx h(0) + h'(0) \cdot d\alpha = 0 + 100 \cdot \frac{\pi}{36} \approx \frac{314}{36} = \frac{157}{18} = 8 + \frac{13}{18} \approx 8.70\, m.$$

◇ ◇ ◇

Ülesanne. Leida ilma arvuti abiga ligikaudu $\sqrt{9.06}$.

8.6 Diferentsiaali leidmise reeglid

Järgmised diferentsiaali leidmise reeglid on otseselt tuletatavad funktsiooni diferentseerimise reeglitest ja on visuaalselt samad.

Johann Wolfgang von Goethe: "Mathematicians are like Frenchmen: whatever you say to them, they translate it into their own language, and forthwith it means something entirely different."

Teoreem 8.2
Kui funktsioonid u ja v on diferentseeruvad punktis x, siis kehtivad valemid

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$;
3. $d(c \cdot u) = c \cdot du$, $c \in \mathbb{R}$;
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$, $v(x) \neq 0$.

Tõestus. Tõestame näiteks jagatise, kasutades korrutamise omadust (viimase tõestus tuleb diferentseerimise reeglitest). Kirjutame

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(u \cdot \frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v} \cdot du + u \cdot d\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{v \cdot du}{v^2} - u \cdot \frac{dv}{v^2} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

□

Näide 8.11
Leiame

$$\begin{aligned} d(x^3 \cdot \ln(x)) &= (dx^3) \cdot \ln(x) + x^3 \cdot (d \ln(x)) \\ &= 3\,x^2 \cdot dx \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \tfrac{1}{x} \cdot dx = \left(3\,x^2 \cdot \ln(x) + x^2\right) \cdot dx. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

8.7 Newton'i meetod võrrandite ligikaudseks lahendamiseks *

Olgu meil lahendada võrrand

$$f(x) = 0 \tag{8.11}$$

ja olgu funktsioon f diferentseeruv piisavalt suures nullkoha $x = x_*$ ümbruses. Valides sellest ümbrusest mingi alglähendi $x = x_0$, saame leida funktsiooni f puutujavõrrandi

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

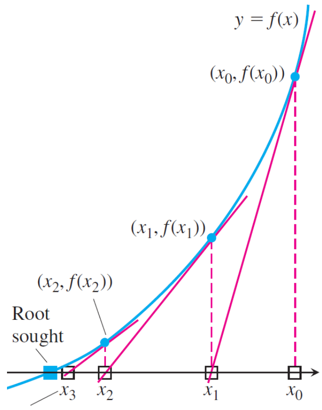
Kuna me otsime nullkohta, siis oleks tark leida puutuja lõikepunkt x-teljega (kuna otsitav lahend x_* peab asuma sel juhul nii x-teljel kui ka puutuja peal). Sel juhul aga y väärtus on null. Seega

$$0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0).$$

Avaldame lõikepunkti y-teljega,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Olles leidnud lõikepunkti x_1, võime kasutada sama valemit, asendades alglähendi x_0 lõikepunktiga x_1 ja otsides järgmist lõikepunkti x_2 jne.



Allikas: [9]

Võrrandi $f(x) = 0$ lahendamiseks kasutatavat iteratiivset meetodit

$$\mathbf{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.12}$$

nimetatakse Newton'i meetodiks.

Näide 8.12 Meetodi jälgimiseks lahendame esiteks väga lihtsa võrrandi, mille täpset lahendit me teame. Näiteks ruutvõrrandi

$$x^2 = 0,$$

mille täpseks laheniks on $x_1 = x_2 = 0$.

Leiame esiteks $f(x) = x^2$ tuletise avaldise,

$$f'(x) = 2x.$$

Olgu $x_0 = 1$ (mis on päris kaugel nullpunktist $x = 0$). Siis

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
x_i	1	0.5	0.25	0.125	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$3.13 \cdot 10^{-2}$
$f(x_i)$	1	0.25	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$3.91 \cdot 10^{-3}$	$9.77 \cdot 10^{-4}$
$f'(x_i)$	2	1	0.5	0.25	0.125	$6.25 \cdot 10^{-2}$

Näeme, et Newton'i meetod koondub täpseks lahendiks $x = 0$. Tabelis on meil väärtus $x_5 = 3.13 \cdot 10^{-2}$.

◇ ◇ ◇

Alglähend x_0 on vabalt ette antav, mis aga praktikas peab siiski olema valitud küllalt "hästi". Tihti kasutatakse selleks graafiku abi. Märgime, et Newton'i meetod leiab ainult ühe nullkoha. Kui võrrandil on neid rohkem, siis tuleb kasutada mitut erinevat alglähendit. Praktikas on Newton'i meetod väga laialt levinud, sealhulgas ka arvutiprogrammides. Newton'i meetod on päris kiire koonduvusega, kuid sõltub väga tugevalt alglähendi x_0 valikust.

Näide 8.13 On olemas palju võrrandeid, mida ei saagi täpselt lahendada. Vaatleme näiteks võrrandit

$$2^x = 4x,$$

mis on just nimelt seda tüüpi, mille jaoks täpse lahendi leidmise meetodid puuduvad. Leiame antud võrrandi ühe nullkoha (mingi täpsusega, kasutades selleks arvuti abi).

Leiame esiteks $f(x) = 2^x - 4x$ tuletise avaldise,

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) - 4.$$

Olgu $x_0 = 0$. Siis (kõiki komakohti me siinjuures ei kirjuta)

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
x_i	0	0.3024023	0.3099016	0.3099069	0.3099069
$f(x_i)$	1	0.0235868	$1.67 \cdot 10^{-5}$	$8.41 \cdot 10^{-12}$	0.00
$f'(x_i)$	-3.3068528	-3.1452135	-3.1407587	-3.1407555	-3.1407555

Näeme, et Newton'i meetod koondub päris kiiresti. Juba 4. iteratsioonil saadakse $x_3 = 0.3099069$, mille korral funktsiooni väärtus $f(x_3) = 8.41 \cdot 10^{-12}$, mis annab piisavalt väikese vea. Arvutiekraanil oli õigeid komakohti isegi rohkem.

◇ ◇ ◇

Ülesanne. Lahendada ligikaudu võrrand

$$x^2 - 1 = \sqrt{4x - 1},$$

kasutades alglähendina nt. $x_0 = 1.5$.

8.8 Tuletise erinevad tähistused *

Lagrange'i tähistus on kujul $f'(x)$, mis on enim levinud matemaatikute hulgas. Siinjuures $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ja on üheselt selge, mida mõeldakse. Tähistuse puuduseks on liitfunktsiooni reegli "peidus" olek ja ranged operatsioonid diferentsiaalidega dx, dy (käsitleme lähemalt Leibniz'i tähistuse juures).

Newton'i tähistus on kujul $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, mis on enim levinud mehaanikas, füüsikas. See tähistus on tüüpiliselt kasutusel tuletise võtmisel aja t järgi. Enamasti kasutatakse ainult esimest ja teist järku tuletise tähistamiseks.

Leibniz'i tähistus on kujul $\dfrac{dy}{dx}$, mis on enim levinud füüsikas ja teistes teadustes, kuid on kohati põlu alla sattunud mõnedes matemaatika harudes. Leibniz'i kuju abil on lihtne meenutada liitfunktsiooni $y(u(x))$ tuletist argumendi x järgi:

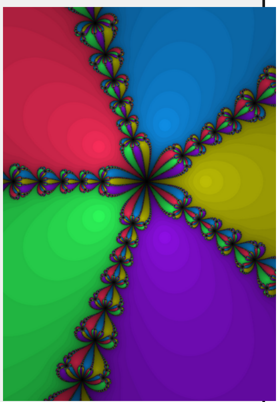
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Toome siinkohal mõningad head ja halvad küljed Leibniz'i tähistuse kohta:

Kui kasutada Newton'i meetodit kompleksarvude jaoks, siis võib luua ilusaid fraktaalseid mustreid. Näiteks järgmine joonis on saadud võrrandi

$$z^5 - 1 = 0$$

lahendamisel Newton'i meetodiga komplekstasandil.



Allikas: Wikipedia

Erinevad värvid näitavad meetodi koondumiskiirust valitud alglähendi korral (mitu iteratsiooni läheb vaja, et meetod koonduks või siis hajuks).

- Paljud füüsikud käsitlevad tihti suurusi dy ja dx kui väga väikesi suurusi (vt. [2]), kuid seejuures selliseid, mis on reaalselt olemas. Seega tihti kujutatakse, et funktsiooni muut $\Delta y \approx dy$ ja sel juhul $\frac{dy}{dx}$ käitub kui kahe väikese suuruse jagatis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (s.t. jagatis reaalarvude vahel). Viimane mõtteviis on praktiliste ülesannete lahendamisel väga efektiivne (eriti, arvestades diferentsiaali rakendusi), lubades vahele jätta mitmed matemaatilised finessid, kuid võib saatuslikuks saada mõnes ebastandardses olukorras (toome näite kõrgemat järku diferentsiaalide juures).

- Saksa matemaatik ja filosoof Gottfried Wilhelm von Leibniz ise mõtles alguses suuruse dx all kui lõpmata väikest suurust, s.t. midagi sellist nagu nullist erinevat suurust, mis on väiksem igast positiivsest reaalarvust (nn. *infinitesimal*), kuid reaalselt sellist suurust ei eksisteeri (vt. [5]). Seega on dx Leibniz'i mõttes lõpmata väike fikseeritud positiivne suurus (kuid mitte arv !!!), midagi sellist nagu $\frac{1}{\infty}$ (samuti sümbol, mitte arv). See viimane tekitab küsimusi, et mida siis tähendab suuruste dy ja dx jagatis, korrutis või summa diferentsiaalidega opereerimisel (need ei ole tehted arvude vaid sellisel juhul tehted algebraliste suuruste vahel)?

  Eelnev mõtteviis sai Leibniz'i ajal suure kriitika osaliseks, kuna oli ju ka loogiliselt vastuoluline. Hiljem muutis Leibniz oma seletustes dx mõiste kui suuruseks, mis võib jõuda lõpmata lähedale nullile, kuid ei saa kunagi võrdseks nulliga. Viimane on ju tegelikult päris hästi kooskõlas piirväärtuse mõistega. Ilmselt mõtles midagi sellist ka Newton oma teoorias, kuid ei pannud seda kunagi päris selgelt kirja. Teatud etapil, enne kriitikuid, ei pidanud kumbki suur teadlane seda ilmselt niiväga oluliseks.

- Matemaatilises mõttes tähistab kirjutis $\frac{dy}{dx}$ diferentseerimisoperaatori $\frac{d}{dx}$ rakendamist funktsioonile $y = f(x)$, s.t.

  $$\frac{d}{dx}f(x) := \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

  Viimases kirjutises loetakse $\frac{dy}{dx}$ kui ühte kokkukuuluvat sümbolit ja mitte kui jagatist (suurustel dx ja dy ei ole selles kirjutises eraldi tähendust). Sellisel juhul diferentsiaali avaldis

  $$dy = f'(x) \cdot dx$$

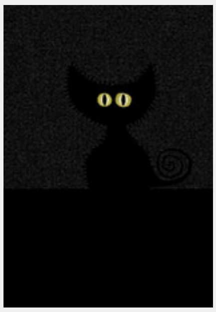
  saadakse kui järeldus tuletise olemasolust ja mitte võrduse $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ läbi korrutamisest suurusega dx. Viimane näib norimisena, kuid matemaatika ja teised teadused ongi selles mõttes erinevad. Matemaatikas tuleb ette (vahel ka konstrueeritud) olukordi, kus analüüs peab olema rangelt täpne, et mitte saada valesid tulemusi.

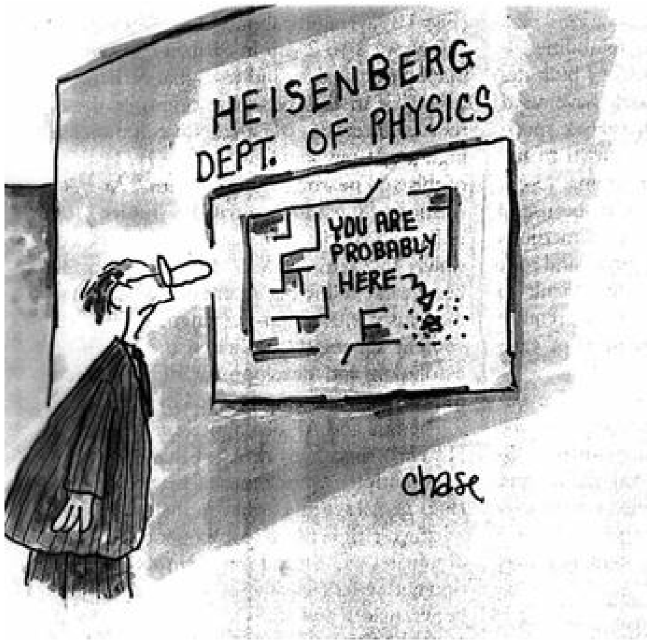
A mathematician, a theoretical economist, and an econometrician are asked to find a black cat (who doesn't really exist) in a closed room with the lights off.

The mathematician gets crazy trying to find a black cat that doesn't exist inside the darkened room and ends up in a psychiatric hospital.

The theoretical economist is unable to catch the black cat that doesn't exist inside the darkened room, but exits the room proudly proclaiming that he can construct a model to describe all his movements with extreme accuracy.

The econometrician walks securely into the darkened room, spends one hour looking for the black cat that doesn't exits and shouts from inside the room that he has caught it by the neck.





Viited

[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] C. Fletcher. Physics with Calculus. Volume I (Classical Mechanics). California, 1994.

[3] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[4] D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, P. F. Lock, D. E. Flath. Applied Calculus. Wiley, 2010.

[5] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross, 1997-98.

[6] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.

[7] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[8] V. Soomer. Matemaatiline analüüs. Tartu Riiklik Ülikool, 1988.

[9] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.

[10] A. J. Washington. Basic Technical Mathematics with Calculus. 10th ed. Pearson, 2014.