Marek Kolk, Kõrgem matemaatika, Tartu Ülikool, 2013-14.

9 Kõrgemat järku tuletis. Ilmutamata ja parameetrilisel kujul antud funktsiooni diferentseerimine

Sisukord

Kontrolltöö teemad

1. Funktsiooni kõrgemat järku tuletise leidmine (näide 9.1).
2. Funktsiooni teine tuletis kui kiirendus (näited 9.2, 9.3).
3. Ilmutamata kujul antud funktsiooni $F(x, y)$ korral y tuletiste leidmine muutuja x järgi (näited 9.5-9.6).
4. Parameetrilisel kujul antud funktsiooni korral I järku tuletise $y'(x)$ leidmine (näide 9.7). Siin kõrgemat järku tuletisi töösse ei tule. Samuti ei tule kiiruse leidmist vektorkujul (nagu nt. näites 9.9).

Eksamiteemad

1. Funktsiooni teise tuletise definitsioon.
2. Funktsiooni teine tuletis kui kiirendus.
3. Ilmutamata kujul antud funktsiooni $F(x, y)$ korral y tuletiste leidmine muutuja x järgi.
4. Parameetrilisel kujul antud funktsiooni korral I järku tuletise $y'(x)$ leidmine.

9.1 Kõrgemat järku tuletis

Olgu funktsioonil $y = f(x)$ lõplikud tuletised hulga X igas punktis $x \in X$. Siis vastavus $x \longmapsto f'(x)$ määrab hulgal X funktsiooni f tuletisfunktsiooni $y = f'(x)$.

Definitsioon 9.1

Kui eksisteerib $[f'(x)]'$ siis seda tuletist nimetatakse funktsiooni f teist järku (teiseks) tuletiseks punktis x,

$$\mathbf{f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}}. \tag{9.1}$$

Funktsiooni f teist järku tuletist tähistatakse ka sümbolitega y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Lühidalt,

$$y'' = (y')'$$

ja analoogiliselt jätkates: n-järku tuletis

$$\mathbf{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'}, \tag{9.2}$$

mille tähistame ka $f^{(n)}(x)$, D^2y või $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Näide 9.1

Leida y^4, kui $y = x^5 + 3\,x^2 + a^x$, $a > 0$. Kirjutame

$$y' = 5\,x^4 + 6\,x + a^x \cdot \ln a,$$

$$y'' = \left(5\,x^4 + 6\,x + a^x \cdot \ln a\right)' = 20\,x^3 + 6 + a^x \cdot \ln^2 a,$$

$$y''' = 60\,x^2 + a^x \cdot \ln^3 a$$

ja viimaks

$$y^{(4)} = 120\,x + a^x \cdot \ln^4 a.$$

◇ ◇ ◇

Ülesanne. Leida funktsiooni

$$y = \frac{3}{x^2 + 4}$$

teine tuletis $y''(x)$.

Märkus 9.1

NB! Leibniz'i tähistust $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ tuleb käsitleda kui diferentseerimisoperaatori $\frac{d}{dx}$ järjest rakendamist,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)\right).$$

Seega

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Märkus 9.2

Kõrgemat järku tuletise leidmisel üldjuhul ei kehti Leibniz'i tähistuse liitfunktsiooni tuletamise võte

$$\frac{d^2\sin(u)}{dx^2} \neq \frac{d^2\sin(u)}{d^2u}\cdot\frac{d^2u}{dx^2},$$

mis töötas väga edukalt esimest järku tuletise korral. Selle asemel tuleks kasutada diferentseerimise reegleid,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sin(u)}{dx^2} &= \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{d\sin(u)}{dx}\right) = \tfrac{d}{dx}\left(\cos(u)\cdot\tfrac{du}{dx}\right)\\ &= \cos(u)\cdot\tfrac{d^2u}{dx^2} + \left(-\sin(u)\cdot\tfrac{du}{dx}\right)\cdot\tfrac{du}{dx}\\ &= \cos(u)\cdot\tfrac{d^2u}{dx^2} - \sin(u)\cdot\left(\tfrac{du}{dx}\right)^2.\end{aligned}$$

Kaupmehelt küsitakse, kuidas on võimalik, et ta oma jäneselihast tehtud võileibade eest saab nii väikest hinda küsida? "See on lihtne," vastanud kaupmees, "Ma kasutan lisaks hobuseliha."

???

"Einoh, ma panen jänese ja hobuse liha vahekorras 50:50 protsenti ... üks jänes ühe hobuse kohta."

Märkus 9.3

Korrutise n-järku tuletise arvutamiseks kehtib Leibniz'i valem

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k)},\quad n\in\mathbb{N},\quad C_n^k = \frac{k!}{n!\,(n-k)!}. \tag{9.3}$$

Siin $u^{(0)} = u$ ja $v^{(0)} = v$.

9.2 Kiirendus ja tõuge

Kui liikuva objekti kiirus muutub, siis öeldakse, et objekt kiirendab. Kiirendus on kiiruse muutumise kiirus. Kiiruse muutus võib olla positiivne (igapäevaselt mõistame kiirenduse all seda juhtu) või negatiivne, kuid ka kiiruse suuna muutus on kiirendus.

Liikugu objekt ajas t seaduse $s = s(t)$ alusel (s on läbitud teepikkus). Siis objekti hetkkiirus on $v(t) = s'(t)$. Analoogiliselt kiirusega, saab rääkida keskmisest kiirendusest ja hetkkiirendusest.

Definitsioon 9.2

Liikuva objekti keskmine kiirendus on võrdne kiiruse muudu ja ajamuudu jagatisega ehk

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Definitsioon 9.3

Liikuva objekti hetkkiirenduseks hetkel t nimetatakse piirväärtust

$$a(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Kokkuvõtteks saame seosed

$$a(t) = v'(t) = s''(t) \tag{9.4}$$

ehk

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{9.5}$$

Eraldi mõistena on olemas veel "tõuge" (inglise keeles "jerk"), mis on kiirenduse muutumise kiirus ehk

$$a'(t) = s'''(t).$$

Ühtlast liikumist ei ole võimalik isoleeritud ruumis kindlaks teha, kiirendust aga küll. Kiirenduse korral mõjuvad kehale survejõud. Tõuget $a'(t)$ saab füüsiliselt tunda selle surve muutumisena.

Inseneriteadustes on tõuke uurimine (enamasti minimiseerimine) eriti oluline inimestega seotud seadmetes nagu näiteks liftid, Ameerika mägede atraktsioon, kuna liiga suur tõuge võib inimesi füüsiliselt kahjustada.

Kiirenduse mõju lemmikloomale. Allikas: funny.com

Näide 9.2 Väike Nõid kihutab luuaga mööda ilma ringi seaduse

$$s(t) = t^3 + 2t^2 + 2$$

alusel. Leida hetke kiirus, kiirendus ja tõuge suvalisel ajamomendil.

Kirjutame

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 + 4t,$$

$$a(t) = v'(t) = 6t + 4$$

ja

$$a'(t) = 6.$$

◇ ◇ ◇

Näide 9.3 Rakett lastakse õhku, kusjuures 12 esimese sekundi jooksul jälgib raketi kõrgus $h = h(t)$ seadust

$$h = 10\sqrt{t^4 + 25} - 50.$$

Leida raketi vertikaalne kiirendus hetkel $t = 10.0$ sekundit.

Kiirenduse arvutamiseks leiame kõrguse h II tuletise,

$$\begin{aligned} a(t) = h''(t) \quad &= \left(\frac{20t^3}{\sqrt{t^4+25}}\right)' = \frac{60t^2 \cdot \sqrt{t^4+25} - 20t^3 \cdot \left(\frac{2t^3}{\sqrt{t^4+25}}\right)}{t^4+25} \\ &= 20t^2 \cdot \frac{t^4 + 75}{(t^4+25)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Seega $a(10.0) = 20.1\, m/s^2$.

◇ ◇ ◇

9.3 Ilmutamata funktsiooni $F(x, y)$ diferentseerimine

Mõnikord on funktsioon ette antud ilmutamata kujul (näiteks ühikringjoon $x^2 + y^2 = 1$). Tasandil antud joon on üldiselt antud kujul

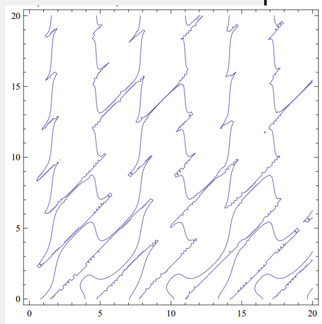
$$F(x, y) = 0. \tag{9.6}$$

Märgime, et iga kahte muutujat sisaldavat võrrandit on alati võimalik esitada ilmutamata funktsiooni kujul $F(x, y) = 0$, sealhulgas ilmutatud kujul antud funktsiooni $y = f(x)$ võib kirjutada kui $y - f(x) = 0$. Mitte alati ei ole võimalik võrrandist $F(x, y) = 0$ elementaarfunktsioonide abil ilmutatud funktsiooni $y = f(x)$ välja eraldada.

Ilmutamata kujul antud funktsioonid (seosed) võivad olla väga keerulised, näiteks

$$x^{-y} + y \cdot \cos(x) - \tan(x - y) = 0$$

graafik on kujul



Allikas: [2]

Kui me tahame teada tasandil oleva joone muutumise kiirust (või siis puutujasirge tõusu), siis peaksime leidma $y'(x)$. Osutub, et ilmutamata kujul antud funktsioonide korral on seda võimalik teha üsna lihtsalt.

1. Mõtleme muutujast y kui argumendist x sõltuvast suurusest, s.t. $y = y(x)$ ja kirjutame
$$F(x, y(x)) = 0. \tag{9.7}$$
2. Diferentseerime võrduse $F(x, y(x)) = 0$ mõlemat poolt muutuja x järgi.
3. Saadud võrrandisse $\frac{dF(x,y(x))}{dx} = 0$ tekib liige $y'(x)$, mille kordajad kogume kokku ja avaldame otsitud tuletise $y'(x)$.

Ülesanne. Leida ilmutamata funktsiooni

$$2y^3 + xy + 1 = 0$$

tuletis dy/dx ja dx/dy.

Märkus 9.4

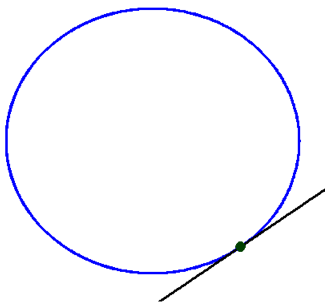
Joone puutuja mõiste jääb siin ikkagi samaks, mis oli ilmutatud funktsiooni $y = f(x)$ korral. Kui $y'(x)$ tuleb $\pm\infty$, siis puutujasirge on risti x-teljega. Kui $y'(x) = 0$, siis puutujasirge on paralleelne x-teljega. Kui tekib määramatus $\frac{0}{0}$, siis enamasti tähendab see, et joon lõikab iseennast.

Näide 9.4 Leiame ühikringjoone $x^2 + y^2 = 1$ puutuja punktis $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. Selleks kirjutame

$$x^2 + y^2(x) - 1 = 0.$$

Diferentseerime seda võrrandit muutuja x järgi. Sel juhul liitfunktsiooni tuletise leidmise omadusest saame

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$$



või siis Leibniz'i tähistuses detailideni läbi tehes

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx} - \frac{d(1)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y \cdot y' = 0.$$

Saame, et

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Punktis $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ on puutujasirge tõusuks $y'\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4}$ ja puutujasirge võrrand ise on kujul

$$y + \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{3}{5}\right).$$

◇ ◇ ◇

Näide 9.5 Leiame seosega

$$x^3 + y^3 - 9x\,y = 0$$

antud joone puutuja punktis $A(2, 4)$. Selleks kirjutame

$$x^3 + y^3(x) - 9x \cdot y(x) = 0.$$

Diferentseerime viimast võrrandit muutuja x järgi,

$$3x^2 + 3y^2(x) \cdot y'(x) - 9y(x) - 9x \cdot y'(x) = 0.$$

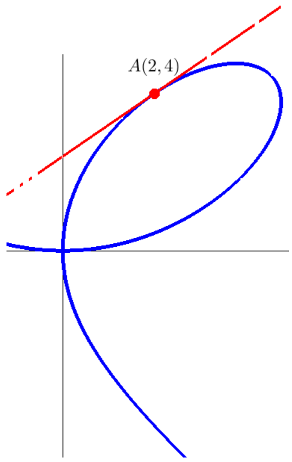
Saame, et

$$y' = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}.$$

Punktis $A\,(2, 4)$ on puutujasirge tõusuks $y'\,(2, 4) = \frac{4}{5}$ ja puutujasirge võrrand ise on kujul

$$y - 4 = \frac{4}{5} \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}.$$

Toodud joont nimetatakse ka Descartes'i leheks (*Descartes Folium*, 1630ndatest).



◇ ◇ ◇

Näide 9.6 Leiame ilmutamata funktsiooni

$$2x^2 + 3y^2 = 6$$

teise tuletise $y''(x)$. Esiteks diferentseerime algvõrrandit,

$$4x + 6y \cdot y' = 0.$$

Võiksime avaldada I tuletise, aga tegelikult on ilma selleta lihtsamgi. Diferentseerime hoopis kogu viimast võrrandit,

$$2 + 3 \cdot (y')^2 + 3y \cdot y'' = 0,$$

millest avaldame

$$y'' = -\frac{2 + 3(y')^2}{3y}.$$

Asendades I tuletise, on võimalik kogu avaldist vajaduse korral lihtsustada,

$$y'' = -\frac{2 + 3\left(-\frac{2x}{3y}\right)^2}{3y} = -\frac{4}{3y^3}.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 9.5

Näidetest võib märgata, et ilmutamata kujul antud seosega $F(x, y) = 0$ leitud funktsiooni $y = y(x)$ tuletise võib leida valemist

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}, \tag{9.8}$$

kus F_x tähistab avaldisest $F(x, y)$ leitud tuletist muutuja x järgi (sel juhul y käitub kui konstant) ja F_y tähistab avaldisest $F(x, y)$ leitud tuletist muutuja y järgi (sel juhul x käitub kui konstant), vt. ka [8], lk. 267.

9.4 Parameetrilisel kujul antud funktsiooni diferentseerimine

Vaatleme juhtu, kus tasandiline joon on antud parameetrilisel kujul

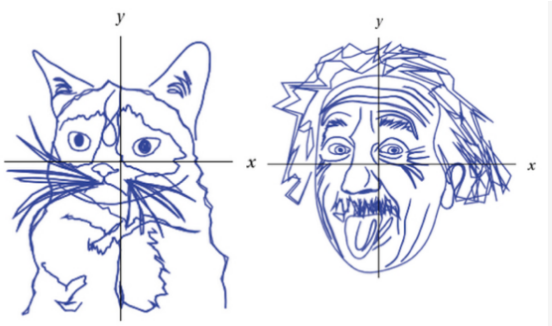
$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\}, \quad t \in T. \tag{9.9}$$

Praktikas on parameetri rollis tihti aeg t.

Näiteks, raadiusega $r > 0$ oleva ringjoone saab esitada kujul

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{array} \right\}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Või siis hoopis arvuti poolt koostatud joonised (millele on leitud ka parameetrilised võrrandid):



Allikas: http://io9.com/these-portraits-were-drawn-with-mathematical-equations-470859735

Sellist joont ei saa esitada ühe ilmutatud funktsiooniga. Samuti on raske kasutada mitut erinevat funktsiooni (kuigi on ilmselt võimalik). Küll aga on tihti tasandilist joont lihtsam kujutada parameetrilisel kujul kahe matemaatilise seose abil.

Ka siin oleme huvitatud joone puutujast või siis joone muutumise kiirusest argumendi x või y järgi.

Lause 9.1

Parameetrilise joone (9.9) puutuja tõus $y'(x)$ punktis $(x(t), y(t))$ leitakse valemiga

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{9.10}$$

Tõestus. Formaalselt saab valemi tuletada liitfunktsiooni tuletise abil,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Pöördfunktsiooni abil tuletamine on toodud õpikus [8]. □

Märkus 9.6

Parameetrilise joonega (9.9) antud funktsiooni $y(x)$ teine tuletis $y''(x)$ punktis $(x(t), y(t))$ leitakse valemiga

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{dy'(x)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy'(x)}{dt}}{x'(t)}. \tag{9.11}$$

Näide 9.7 Osake liigub ajas t mööda ühikringjoont

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{array} \right\}, \quad t \in [0, 1000].$$

Leida joone muutumise kiirus $y'(x)$ ja kiirendus $y''(x)$ muutuja x suhtes.

Lihtne on välja kirjutada diferentsiaale aja t järgi,

$$dx = d(\cos(t)) = -\sin(t) \cdot dt, \quad dy = d(\sin(t)) = \cos(t) \cdot dt.$$

Antud juhul võib diferentsiaale kasutada kui arve,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(t) \cdot dt}{\sin(t) \cdot dt} = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)} = -\cot(t).$$

Leiame teise tuletise,

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(-\cot(t))}{dx} = -\frac{-\frac{1}{\sin^2(t)} \cdot dt}{-\sin(t) \cdot dt} = -\frac{1}{\sin^3(t)}.$$

Kuna $y = \sin(t)$, siis saab vastused esitada ka kujul

$$y'(x) = -\frac{x}{y}, \quad y''(x) = -\frac{1}{y^3}.$$

◇ ◇ ◇

Ülesanne. Leida parameetrilise joone

$$x = 0.8\,t^{5/2},$$

$$y = 1 - t^2$$

muutumise kiirus $y'(x)$ ja muutumise kiirendus $y''(x)$ hetkel $t = 2$.

Ülesanne. Leida parameetrilise joone

$$x = t - \sin\theta,$$

$$y = 1 - \cos\theta$$

puutuja tõus $y'(x)$ nurga $\theta = \frac{\pi}{3}$ korral.

Märkus 9.7

Levinud **viga** on Leibniz'i tähistuses teise tuletise

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

leidmine eraldi liikmete d^2y ja dx^2 jagatisest, kui x ei ole sõltumatu muutuja, vaid esitub liitfunktsioonina. Näites 9.7 saime, et

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y^3} = -\frac{1}{\sin^3(t)}.$$

Leiame eraldi

$$d^2y = y''(t) \cdot dt^2 = -\sin(t) \cdot dt^2, \quad dx^2 = (-\sin(t) \cdot dt)^2 = \sin^2(t) \cdot dt^2.$$

Siit jagatis

$$\frac{d^2y}{dx^2} \longrightarrow \frac{-\sin(t) \cdot dt^2}{\sin^2(t) \cdot dt^2} = -\frac{1}{\sin(t)} = -\frac{1}{y}.$$

Näeme, et saadud tulemus ei ühti viimases näites 9.7 saadud tulemusega.

Näide 9.8 Osake liigub ajas t mööda joont

$$\left\{ \begin{array}{l} x = e^{-2t} \\ y = 1 + 2t \end{array} \right\}, \quad t \in [0, 200].$$

Leida joone muutumise kiirus $y'(x)$ ja kiirendus $y''(x)$ muutuja x suhtes.

Lihtne on välja kirjutada diferentsiaale aja t järgi,

$$dx = d(e^{-2t}) = -2e^{-2t} \cdot dt, \quad dy = d(1+2t) = 2 \cdot dt.$$

Siit saame

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot dt}{-2e^{-2t} \cdot dt} = -e^{2t}.$$

Leiame teise tuletise,

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(-e^{2t})}{dx} = -\frac{-2e^{2t} \cdot dt}{-2e^{-2t} \cdot dt} = e^{4t}.$$

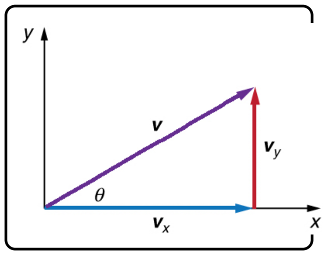
⋄ ⋄ ⋄

Kui keha liigub mööda parameetrilist joont koordinaatidega $x = x(t)$ ja $y = y(t)$, siis selle keha kiirusvektori v komponendid v_x ja v_y avalduvad valemitega

$$v_x = x'(t), \quad v_y = y'(t), \tag{9.12}$$

ning kogukiirus avaldub kiirusvektori v moodulina

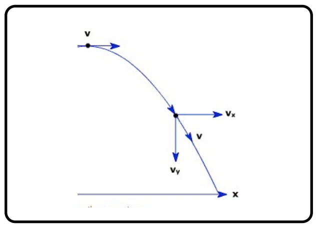
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{9.13}$$



Näide 9.9 Keha liigub trajektooril, kus tema x- ja y-koordinaat muutuvad seaduste

$$x = 1 + 2t, \quad y = t^2 - 3t,$$

alusel. Leida keha kiirus, kiirendus ja suund hetkel $t = 2$ sekundit.



Esiteks

$$v_x = x'(t) = 2, \quad v_y = y'(t) = 2t - 3.$$

Kuna hetkel $t = 2$ on $v_x = 2$ ja $v_y = 1$, siis kogukiirus

$$|v| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx 2.24\, m/s.$$

Analoogiliselt kiirustega leiame kiirenduse komponendid,

$$a_x = v_x'(t) = 0, \quad a_y = v_y'(t) = 2 \quad \Rightarrow \quad |a| = \sqrt{0+4} = 2\, m/s^2.$$

Liikumise suund leitakse liikumisvektori komponentide järgi (analoogiline kompleksarvude teemaga)

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 26.6°.$$

Tekib küsimus, mis asi on siin aga kiirus $y'(x)$? Võime selle ka leida

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{2}.$$

Näeme, et $y'(x)$ on liikumissuuna tõusunurga tangens. Viimane ei ütle meile keha enda liikumiskiiruse kohta midagi, ta kirjeldab keha liikumise **trajektoori** muutumiskiirust antud punktis.

Tuletised $v_x = x'(t)$ ja $v_y = y'(t)$ aga iseloomustavad **keha** horisontaal- ja vertikaalsuunalist kiirust. Viimaste abil saab leida keha kiiruse v enda.

⋄ ⋄ ⋄

9.5 Logaritmiline diferentseerimine *

Logaritmilise diferentseerimise võte on vältimatu $[u(x)]^{v(x)}$ tüüpi funktsioonide korral, kuid see on abiks ka siis, kui f sisaldab palju korrutisi ja jagatisi.

Olgu meil antud funktsioon $y = f(x)$. Leiame tuletise y' järgmiselt.

1. Kirjutame $|y| = |f(x)|$.
2. Võtame võrduse $|y| = |f(x)|$ mõlemast poolest logaritmi,
$$\ln|y| = \ln|f(x)|.$$
3. Võtame mõlemast poolest tuletise,
$$\frac{1}{y}\cdot y' = (\ln|f(x)|)\,'.$$
4. Saadud seosest avaldame $y\,'$,
$$y\,' = y\cdot(\ln|f(x)|)\,'. \tag{9.14}$$

Näide 9.10 Leiame funktsiooni $y = x^x$ tuletise, $x > 0$. Kirjutame

$$\ln|y| = \ln|x|^x = x\cdot\ln|x|.$$

Siit

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (x\cdot\ln|x|)\,'.$$

Seega

$$y\,' = x^x\cdot(\ln|x|+1).$$

◇ ◇ ◇

Ülesanne. Leida funktsiooni

$$(x+1)^{x^2-1}$$

tuletis.

Näide 9.11 Leiame funktsiooni $y = [\sin(x)]^{\cos(x)}$ tuletise. Kirjutame

$$\ln|y| = \ln|\sin(x)|^{\cos(x)} = \cos(x)\cdot\ln|\sin(x)|.$$

Siit

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (\cos(x)\cdot\ln|\sin(x)|)\,'.$$

Seega

$$y\,' = [\sin(x)]^{\cos(x)}\cdot\left(-\sin(x)\cdot\ln|\sin(x)| + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right).$$

◇ ◇ ◇

Näide 9.12 Leiame funktsiooni

$$y = \frac{\sqrt[4]{x+1}\cdot(x^7+8)^{12}\cdot(x+15)^2}{15\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

tuletise.

Kirjutame

$$\ln|y| = \frac{1}{4}\cdot\ln|x+1| + 12\cdot|x^7+8| + 2\cdot\ln|x+15| - \ln(15) - \frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+1|.$$

Seega

$$y' = y\cdot\left(\frac{1}{4\cdot(x+1)} + \frac{84\cdot x^6}{x^7+8} + \frac{2}{x+15} - \frac{x}{x^2+1}\right).$$

◇ ◇ ◇

9.6 Kõrgemat järku diferentsiaal *

Funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal dy esitub teatavasti valemiga

$$dy = f'(x)\cdot dx,$$

kusjuures üldjuhul $dy = dy(x, dx)$. Kui fikseerime argumendi muudu $\Delta x = dx$, siis dy on argumendi x funktsioon (sisuliselt $y'(x)$ korda reaalarv dx). Kui see funktsioon on punktis x diferentseeruv, siis saame omakorda leida diferentsiaali $d(dy)$, mida nimetatakse funktsiooni f teist järku (teiseks) diferentsiaaliks punktis x ja tähistatakse sümboliga d^2y, seega

$$d^2y = d(dy).$$

Analoogselt jätkates, kolmandat järku diferentsiaal $d^3y = d(d^2y)$ ja n-järku diferentsiaal

$$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right). \tag{9.15}$$

Lause 9.2

Kui x on sõltumatu muutuja ja funktsioonil $y = f(x)$ eksisteerib lõplik tuletis $f^{(n)}(x)$, siis kehtib valem

$$\mathbf{d^ny = f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n}. \tag{9.16}$$

Tõestus. Skemaatiliselt saame kasutada matemaatilist induktsiooni. Esiteks märgime, et valem on tõene $n = 1$ korral (diferentsiaali definitsioonist). Oletame, et valem kehtib $n-1$ korral (n>1). Näitame, et siis kehtib valem ka n korral. Kirjutame

$$\begin{aligned} d^ny &= d(d^{n-1}y) = d[f^{(n-1)}(x)\cdot(dx)^{n-1}] \\ &= (dx)^{n-1}\cdot df^{(n-1)}(x) + f^{(n-1)}(x)\cdot d(dx)^{n-1}. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et $d(dx)^{n-1} = 0$, kui $n > 1$, sest et argumendi muut $\Delta x = dx$ oli meil fikseeritud ja dx käitub x suhtes kui konstant. Seega

$$d^ny = (dx)^{n-1}\cdot d(f^{(n-1)}(x)) = (dx)^{n-1}\cdot f^{(n)}(x)\cdot dx = f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n.$$

□

Two statisticians were traveling in an airplane from LA to New York. About an hour into the flight, the pilot announced that they had lost an engine, but don't worry, there are three left. However, instead of 5 hours it would take 7 hours to get to New York.

A little later, he announced that a second engine failed, and they still had two left, but it would take 10 hours to get to New York. Somewhat later, the pilot again came on the intercom and announced that a third engine had died. Never fear, he announced, because the plane could fly on a single engine. However, it would now take 18 hours to get to new York.

At this point, one statistician turned to the other and said, "Gee, I hope we don't lose that last engine, or we'll be up here forever!"

Märkus 9.8

Kui x on sõltumatu muutuja, siis kirjutatakse $(dx)^n$ lühidalt kui dx^n. Valemist (9.16) näeme, et

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}, \tag{9.17}$$

s.t. Leibniz'i tähistust $\frac{d^n y}{dx^n}$ funktsiooni n-järku tuletise jaoks (sõltumatu muutuja järgi) võib vaadelda kui harilikku murdu.

Theorem: Every positive integer is interesting.

Proof. Assume towards a contradiction that there is an uninteresting positive integer. Then there must be a smallest uninteresting positive integer. But being the smallest uninteresting positive integer is interesting by itself. Contradiction!

Seni vaatlesime juhtu, kus $y = f(x)$ ja x on sõltumatu muutuja. Sel juhul kehtib $dx = \Delta x$. Vaatleme nüüd olukorda, kus $y = f(x)$ ja $x = \varphi(t)$, s.t. $y = F(t) = f(\varphi(t))$. Kuna t on sõltumatu muutuja, siis

$$dy = dF = F'(t) \cdot dt, \quad dx = \varphi'(t) \cdot dt,$$

mistõttu liitfunktsiooni tuletise leidmise reegli põhjal

$$dy = F'(t) \cdot dt = f'(x) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = f'(x) \cdot dx.$$

Seega avaldub funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal kujul

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

sõltumata sellest, kas x on sõltumatu muutuja või omakorda mingi argumendi t funktsioon.

Hello, this is probably 438-9012, yes, the house of the famous statistician. I'm probably not at home, or not wanting to answer the phone, most probably the latter, according to my latest calculations. Supposing that the universe doesn't end in the next 30 seconds, the odds of which I'm still trying to calculate, you can leave your name, phone number, and message, and I'll probably phone you back. So far the probability of that is about 0.645. Have a nice day.

Märkus 9.9

Öeldakse, et esimest järku diferentsiaali kuju on invariantne muutujavahetuse suhtes.

Märkus 9.10

Kõrgemat järku diferentsiaali kuju ei ole invariantne muutujavahetuse suhtes. Leiame d^2y, kui $y = f(x)$ ja $x = \varphi(t)$,

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x) \cdot dx) = d(f'(x)) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx)$$

ja siit

$$d^2y = f''(x) \cdot dx \cdot dx + f'(x) \cdot d^2x = f''(x) \cdot dx^2 + f'(x) \cdot d^2x.$$

Kirjutame tulemuse eraldi välja

$$d^2y = f''(x) \cdot dx^2 + f'(x) \cdot d^2x. \tag{9.18}$$

Valem (9.16) enam ei kehti.

Näide 9.13 Vaatleme funktsiooni $y = x^2$, kus $x = t^3$. Sel juhul näeme lihtsalt, et $y = t^6$ ja

$$dy = y'(t) \cdot dt = 6\,t^5 \cdot dt.$$

I järku diferentsiaali invariantsus tähendab, et võiksime leida eraldi

$$dy = y'(x) \cdot dx = 2x \cdot dx$$

ja asendada dy avaldisse $x = t^3$ ning $dx = 3t^2 \cdot dt$,

$$dy = 2x \cdot dx = 2t^3 \cdot 3t^2 \cdot dt = 6\,t^5 \cdot dt.$$

Leiame II diferentsiaali. Kuna t on sõltumatu muutuja, siis võime leida

$$d^2y = y''(t) \cdot dt^2 = 30\,t^4 \cdot dt^2.$$

Märgime, et

$$dx = 3\,t^2 \cdot dt.$$

Asetades vastavad väärtused valemisse (9.18), kirjutame

$$\begin{aligned} d^2y &= f''(x) \cdot dx^2 + f'(x) \cdot d^2x = 2 \cdot (3\,t^2 \cdot dt)^2 + 2x \cdot (x''(t) \cdot dt^2) \\ &= 18\,t^4 \cdot dt^2 + 2\,t^3 \cdot 6\,t \cdot dt^2 = 18\,t^4 \cdot dt^2 + 12\,t^4 \cdot dt^2 = 30\,t^4 \cdot dt^2. \end{aligned}$$

Saime sama vastuse, mis eespool. Teisalt, näeme, et sõltumatu muutuja korral kasutatava valemi

$$d^2y = f^{(2)}(x) \cdot (dx)^2$$

parem pool on $18\,t^4 \cdot dt^2$ ja õigest vastusest on puudu $12\,t^4 \cdot dt^2$. Tõepoolest, valem (9.16) ei pruugi kehtida liitfunktsiooni $y = f(x(t))$ korral.

◇ ◇ ◇

Viited

[1] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).

[2] E. Dummit. Calculus I. Introduction to Differentation (veebikonspekt). 2013.

[3] C. Fletcher. Physics with Calculus. Volume I (Classical Mechanics). California, 1994.

[4] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.

[5] D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, P. F. Lock, D. E. Flath. Applied Calculus. Wiley, 2010.

[6] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross, 1997-98.

[7] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt). 2002.

[8] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[9] V. Soomer. Matemaatiline analüüs. Tartu Riiklik Ülikool, 1988.

[10] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.

[11] A. J. Washington. Basic Technical Mathematics with Calculus. 10th ed. Pearson, 2014.