

1.1 Kompleksarvud. Aritmeetiline, geomeetiline ja trigonomeetiline kuju

Algebraalne kuju: $z = a + b \cdot i, i^2 = -1$ Kaaskompleksarv: $\bar{z} = a - b \cdot i$ Moodul: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Tehted algebraisel kujul

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Trigonomeetiline

kuju: $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ Argument: $\theta = \arctan \left| \frac{b}{a} \right|$

$\varphi = \pi - \theta$	$\varphi = \theta$
$a < 0, b > 0$	$a > 0, b > 0$
$a < 0, b < 0$	$a > 0, b < 0$
$\varphi = \pi + \theta$	$\varphi = -\theta$

Tehted trigonomeetrilisel kujul

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Ülesanne 1.1

Kujutada komplekstasandil järgmised kompleksarvud:

(a) $3 - 2i$, (b) $\overline{3 - 2i}$, (c) $-7j, j^2 = -1$, (d) $|3 + \sqrt{6}i|$, (e) $\overline{|3 + \sqrt{6}i|}$.

Ülesanne 1.2Leida kõikvõimalikud reaalarvud x ja y , mille korral $2ix + 3 = y - i$.**Ülesanne 1.3**Leida kõikvõimalikud reaalarvud x ja y , mille korral $z^2 = \bar{z}^2, z = x + iy$.**Ülesanne 1.4**Leida arvude z_1 ja z_2 summa, vahe, korrutis, jagatis, moodulid ja kaaskompleksid:

(a) $z_1 = 3, z_2 = -4i$, (b) $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$, (c) $z_1 = 1 + i, z_2 = -3 + 2i$,
(d) $z_1 = 2 - 5i, z_2 = 3 + i$, (e) $z_1 = 2 - 7i, z_2 = 3 + 4i$, (f) $z_1 = 4i, (1 + 2i)^2$.

Ülesanne 1.5Kirjutada algebraisel kujul $a + bi$,

(a) $z = i^{20}$, (b) $z = i^5 + i + 1$, (c) $z = (3 + 3i)^8$, (d) $\frac{1+i}{1-i} - \frac{3-i}{1+i} + 3i$.

Ülesanne 1.6Viia kompleksarv z üle trigonomeetrilisele kujule:

(a) $z = 8$, (b) $z = 6i$, (c) $z = -1 - i$, (d) $z = -\sqrt{3} + i$,
(e) $z = -3 - \sqrt{3}i$, (f) $z = 2 + 2i$, (g) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, (h) $z = 7 - 2i$.

Ülesanne 1.7Teisendada kompleksarv z algebralisele kujule $a + bi$,

(a) $z = \cos(16\pi) + i \sin(16\pi)$, (b) $z = 4 [\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6})]$,
(c) $z = 8 [\cos(210^\circ) + i \sin(210^\circ)]$, (d) $z = 3 [\cos(\frac{5\pi}{2}) - i \sin(\frac{5\pi}{2})]$.

Ülesanne 1.8

Leida $z_1 \cdot z_2$ ja z_1/z_2 , kui

$$(a) \begin{cases} z_1 = 4 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right), \\ z_2 = 2 \left(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi \right), \end{cases} \quad (b) \begin{cases} z_1 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \\ z_2 = 3 [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \end{cases}.$$

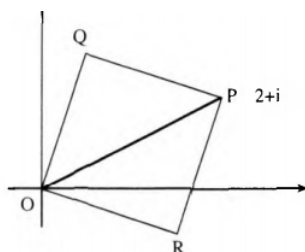
Ülesanne 1.9

Sooritada tehted

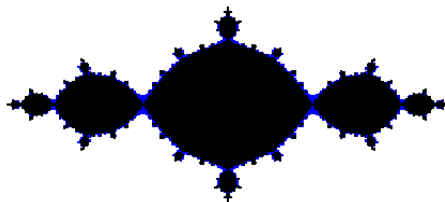
$$(a) \frac{(5+3i)(5-3i)}{\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})}, \quad (b) \frac{(1+i)^2}{2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})}, \quad (c) \frac{\cos(69.5^\circ) + i \sin(69.5^\circ)}{\cos(-17.5^\circ) + i \sin(-17.5^\circ)}.$$

Ülesanne 1.10

☒ Ruudu diagonaal asub punktide 0 ja $2+i$ vahel. Leida ruudu kaks ülejäänud tippu Q ja R .

**Ülesanne 1.11**

☒ Vaatleme iteratsiooniprotsessi $z_{n+1} = z_n^2 - 1$, $n = 0, 1, \dots$, kus $z_n = a_n + b_n i$ on kompleksarvud. Kontrollida, kas protsess on tõkestatud (s.t. $|z_n| \leq 2$) arvude $z_0 = 1$, $z_0 = i$ ja $z_0 = 1+i$ korral? Märkus: antud iteratsiooniprotsessist saame alltoodud Julia hulga (mustalt on märgitud punktid, mille korral protsess ei hajugu esimese 250 sammu jooksul).

**Ülesanne 1.12**

☒ Näidata, et kui kehtib võrdus $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, siis kompleksarvude z_1 ja z_2 argumendid peavad erinema täisnurga $\frac{\pi}{2}$ võrra.

Valitud vastused

1.4. a) $z_1 + z_2 = 3 - 4i$, $z_1 - z_2 = 3 + 4i$, $z_1 \cdot z_2 = -12i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}$, $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$, $\bar{z}_1 = 3$, $\bar{z}_2 = 4i$.

1.4. c) $z_1 + z_2 = -2 + 3i$, $z_1 - z_2 = 4 - i$, $z_1 \cdot z_2 = -5 - i$, $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$, $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{13}$, $\bar{z}_1 = 1 - i$, $\bar{z}_2 = -3 - 2i$.

1.6. a) $z = 8 \cdot (\cos(0) + i \sin(0))$, c) $z = \sqrt{2} \cdot (\cos(-135^\circ) + i \sin(-135^\circ)) = \sqrt{2} \cdot (\cos(-\frac{3}{4}\pi) + i \sin(-\frac{3}{4}\pi))$.

1.7. a) $z = 1 + 0i$.

1.8. a) $z_1 \cdot z_2 = 8 \cdot (\cos(\frac{7}{6}\pi) + i \sin(\frac{7}{6}\pi))$.

1.9. a) $z = -17 + 17i$.

1.10. Punkt $Q = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. Oluline on siin see, kui elegantselt lihtsalt see leitakse 😊