

10.1 Määratud integraal. Pindala arvutamine

Kõvertrapetsi pindala,

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Pindala parameetrilise funktsiooni korral,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Kõversektori pindala,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Ositi integreerimine,

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Ülesanne 10.1

Leidke järgmised integraalid:

- (a) $\int_1^2 x^3 dx$, (b) $\int_{-1}^2 |x| dx$, (c) $\int_0^{\pi} |\cos x| dx$, (d) $\int_{-1}^3 |x(x-2)| dx$,
- (e) $\int_0^1 xe^x dx$, (f) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$, (g) $\int_{-10}^{10} (x + |x|) dx$, (h) $\int_{-2}^5 e^{5-x} dx$,
- (i) $\int_1^4 \frac{y+4}{\sqrt{y}} dy$, (j) $\int_0^4 \frac{5x dx}{\sqrt{x^2+9}}$, (k) $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$, (l) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t dt$.

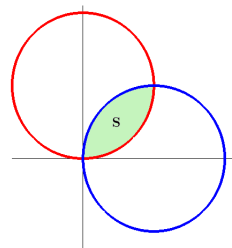
Ülesanne 10.2Leida integraali $\int_0^3 x \sqrt{x+1} dx$ väärtus, tehes muutujavahetuse $t = \sqrt{x+1}$.**Ülesanne 10.3**

Leidke järgmiste joontega piiratud kujundi pindalad:

- (a) $y = x^2, y = x^{1/3}, x = -2, x = 2$, (b) $y = 8 - 2x^2, y = 0$,
- (c) $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$, (d) $y = x^2, y = x^3$,
- (e) $y = \frac{1}{4}x^2, y = -x^2, y = 2x - 4$, (f) $y^2 = x^4(1 - x^3)$.

Ülesanne 10.4Leida kahe ühikringi poolt piiratud kujundi pindala S . Ringide võrranditeks on polaarkujul vastavalt

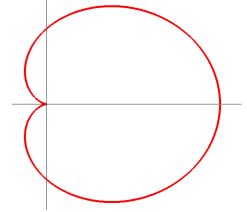
$$r = 2 \sin \theta, \quad r = 2 \cos \theta.$$



Ülesanne 10.5

Leida kardioidi pindala, kui

$$r = 2(1 + \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

**Ülesanne 10.6**

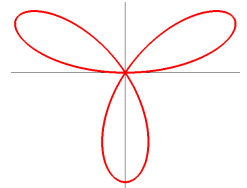
Harjutamiseks leidke ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pindala integreerimise teel nii ilmutatud funktsiooni kui ka parameetriliselt antud funktsiooni ($x = a \cos(t)$, $y = b \sin(t)$) kaudu.

Ülesanne 10.7

Leida kolmelehelise roosi pindala, kui

$$r = 2 \sin(3\varphi).$$

Nurk $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$ joonistab välja ühe õie.

**Ülesanne 10.8**

✂ Lennukompanii kütusekulu aastatel 2007 – 2013 on modelleeritav funktsiooniga

$$C_1(t) = 586.5 + 7.15t,$$

kus t on aastad, $t = 7$ tähistab aastat 2007 ja $C_1(t)$ on kulutus kütusele miljonites eurodes aasta kohta. Kui kompanii ostab uuemad lennukid, siis võib kulutusi modelleerida funktsiooniga

$$C_2(t) = 525.6 + 6.43t.$$

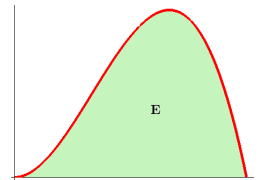
Mitu miljonit eurot võib kompanii aastatel 2007 – 2013 niimoodi kütuse pealt kokku hoida?

Ülesanne 10.9

Mõningaid füüsikalisi suurusi esitatakse tihti kui joonealust pindala. Näiteks, päikesekiirguse mõõtmised teatud pinnal näitavad, et päeva jooksul langeb kiirgus pinnale kiirusega r džauli tunnis, kus

$$r = 3600(12t^2 - t^3).$$

Kuna r on kiirus, siis $r = dE/dt$, kus E on pinnale jõudev energia (J). Sel juhul $dE = r dt$ ja võttes siit mõlemast poolest integraali 0 ja 12 tunni vahel, saame leida päeva jooksul pinnale langeva koguenergia E . Leidke see.

**Valitud vastused**

10.1. a) $\frac{15}{4}$, c) 2, e) 1, g) 100, i) $\frac{38}{3}$, k) $4 - \ln 9$.

10.3. a) ≈ 4.353 , c) $e - 1$, e) ≈ 2.546 , keskmine lõikekoht on $\sqrt{5} - 1$.

10.5. $S = 6\pi$.

10.6. $S = \pi a b$, mõlemal juhul 😊

10.8. 408.6 miljonit.