

11.1 Kaare pikkus, nihe ja teepikkus, töö, aritmeetiline keskmine

Kaare pikkus,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Jõu F poolt tehtud töö,

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Nihe ja läbitud teepikkus,

$$\Delta s = \int_a^b v(t) dt, \quad s = \int_a^b |v(t)| dt.$$

Funktsiooni keskvärtus,

$$\hat{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Ülesanne 11.1

Leidke järgmiste joonte märgitud kaarte pikkused:

(a) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 1, x \in [0, 2],$

(b) $y = ch(x), x \in [-1, 1],$

(c) $y = \ln(\sin(x)), 0 < a \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

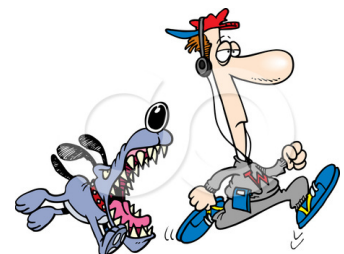
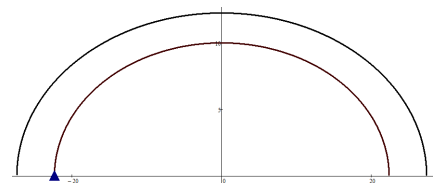
Ülesanne 11.2Leida astroidi ($x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$) kaare pikkus.**Ülesanne 11.3**☞ Leida joone $r = \varphi^2$ kaare pikkus nurga $\varphi \in [0, 2]$ korral (radiaanides).**Ülesanne 11.4**

☠ Staadionil on kaks jooksurada (märgitud joontega), mis on planeeritud võrranditega

$$f_1(x) = \sqrt{100 - 0.2x^2},$$

$$f_2(x) = \sqrt{150 - 0.2x^2}.$$

Sisemise rea start algab punktist $(-\sqrt{500}, 0)$. Millisesse punkti tuleb stardijoon paigutada välisel rajal, kui finiš asub x -teljel, jookstakse kellaosuti liikumise suunas ja läbitud distantsid peavad olema mõlemal rajal võrdsed? (Integreerimisel võib vaja minna arvuti abi.)



© Ron Leishman * www.ClipartOf.com/439200

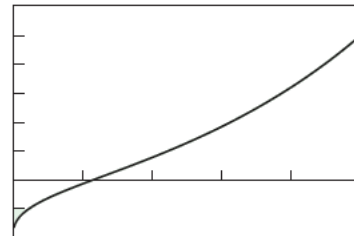
Ülesanne 11.5Kanakull lendab 225 m kõrgusel pillates nokavahelt maitsva hiirekese, kelle lennutrajektoor maandumiseni jälgib parabolset kuju $y = 225 - \frac{x^2}{64}$. Arvutada hiirekese poolt läbitud teepikkus.

Ülesanne 11.6

Osake alustab liikumist punktist $s(0) = 9$ ja liigub kiirusega

$$v(t) = t^2 - \frac{8}{(t+1)^2}, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Leida läbitud teepikkus ja kui kaugele algpunktist osake liikus.

**Ülesanne 11.7**

Võõrkeha sattumisel verre luuakse konkreetnes mudelis organismi kaitseks antikehi kiirusega $r(t) = \frac{t}{t^2+1}$ tuhat antikeha minutis. Leida antikehade arv 5 minutit pärast võõrkeha sattumist verre, arvestades, et alguses antikehi ei ole.

Ülesanne 11.8

Hooke'i seaduse järgi on vedru kokku surumiseks vajaminev jõud võrdeline vedru pikenemisega ehk $F(x) = kx$. Kui palju tehakse tööd vedru kokku surumisel 0.25 m võrra, kui konstant $k = 16 \text{ N/m}$?

Ülesanne 11.9

Elektronil on negatiivne laeng $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Kui palju tehakse tööd kahe elektroni eraldamisel 10^{-12} meetrilt 4×10^{-12} meetrini? Kahe elektroni vahel mõjuv jõud avaldub valemiga $f(x) = k \frac{q_1 q_2}{x^2}$, kus $k = 9 \times 10^9$, q_1 ja q_2 on osakeste laengud ja x nende vaheline kaugus.

Ülesanne 11.10

☠ 680 kg raskune lift on kinnitatud trosside otsa, mis kokku kaaluvad 18 kg ühe meetri kohta. Leida, kui palju tehakse tööd, tõstes lifti keldrikorrusele teisele korrusele (kokku 7 m).

Ülesanne 11.11

Päevane mõõdetud õhutemperatuur jälgis joone $T(t) = 0.001t^4 - 0.280t^2 + 25$ väärtusi südaööst $t = -12$ kuni järgmise südaööni $t = 12$. Milline oli keskmine temperatuur?

Ülesanne 11.12

Teatud automootori kasutegur e (protsentides) avaldub valemiga $e = 0.768s - 0.00004s^3$, kus s on auto kiirus (km/h). Leida keskmine kasutegur kiiruste 30 km/h ja 90 km/h vahel.

Valitud vastused

11.1. a) $2\sqrt{6} - \frac{8}{3}$, b) $\text{sh}(1)2.35$, c) $\text{arth}(\cos(a))$.

11.3. $\frac{8}{3}(\sqrt{8} - 1) \approx 4.88$.

11.4. Välise raja pikkus on 52.7. Start tuleb panna punkti $(-19.91, f_1(-19.91))$.

11.5. $16b + 8 \text{sh}(2b) \approx 265.4$ meetrit, kus $b = \text{arsh}(15/4) \approx 2.03$.

11.6. Nihe on 35, osake asub punktis 44 ja läbiti 42.6 pikkusühikut.

11.9. $A \approx 1.73 \cdot 10^{-16} \text{ J}$.

11.10. $A = 5201 \text{ kg} \cdot \text{m}$.

11.11. $\bar{T} \approx 15.7$.