

12.1 Ruumala, masskese, päratud integraalid

Pöördkeha ja ristlõigete ruumala,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \quad V = \int_a^b S(x) dx.$$

Masskese f ja g vahel,

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \int_a^b \frac{1}{2}[f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

Pöördkeha pinna pindala,

$$S_* = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Tõenäosus, keskväärtus,

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x) dx, \quad E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx.$$

Ülesanne 12.1Leidke ruumalad, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber x -telje:

(a) $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi, y = 0,$

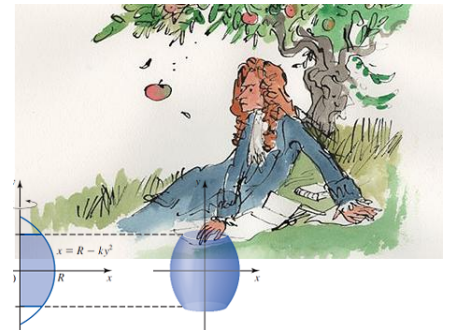
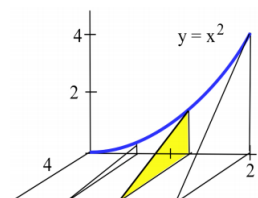
(b) $y = e^{-x}, 0 \leq x < \infty, y = 0,$

(c) $xy = 2, y = 0, x = 1, x = 3.$

Ülesanne 12.2Leida pöördkoonuse ruumala. Koonus tekib sirge $y = ax$ ($a > 0$) pöörlemisel ümber x -telje ja on kõrgusega $h > 0$.**Ülesanne 12.3**

Mitu kg taliõunu peaks Newton mahlaks pressima, et täita omanimelist veinivaati

$$x = R - ky^2, \quad x = 0, \quad y \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]?$$

Arvutamiseks võtame $R = k = h = \frac{1}{2}$ m. 1 liitri mahla pressimiseks läheb vaja keskmiselt 2 kg õunu.**Ülesanne 12.4**Portselanist vaas tehakse selliselt, et parabooli $y = 2x^2$ ja sirge $y = x + 1$ vahele jääv pind pöörleb ümber x -telje. Arvutada vajaminev portselani kogus.**Ülesanne 12.5**Leida ruumala kujundile, millel on kolmnurksed ristlõiked ja mille kõrgus jälgib joone $y = x^2$ kuju. Kolmnurkade alused on pikkusega 4 ja vaotleme lõiku $x \in [0, 2]$.

Ülesanne 12.6

☞ Leida ellipsoidi ruumala,

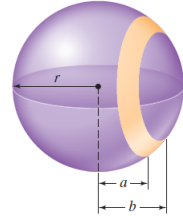
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ülesanne 12.7

👍 Leida kera segmendi ruumala, kui kera raadius on r ja segmendi kõrgus on h .

Ülesanne 12.8

👍 Leida raadiusega r oleva kera pinna (tekkiva riba) pindala raadiuste a ja b vahel, $0 < a < b < r$.

**Ülesanne 12.9**

Leida joontega $y = x^3$, $x = 0$, $x = 2$ ja $y = 0$ ümbritsetud kujundi massikeske (\bar{x}, \bar{y}) .

Ülesanne 12.10

Arvutada päratud integraalid või veenduda nende hajumises:

(a) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\ln|x|}{x} dx$, (b) $\int_1^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4} dx$, (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$, (d) $\int_0^1 x^{-1/3} dx$, (e) $\int_0^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$.

Ülesanne 12.11

Cauchy-Lorentz'i tihedusfunktsiooni $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ kasutatakse füüsikas mõningates mudelites, näiteks ebastabiilses olekus energia jaotumisel. Leida tõenäosus, et $x > \sqrt{3}$. Kas sellel jaotusel leidub keskväertus $E(x)$?

Ülesanne 12.12

☞ IQ testide tulemused on tavaliselt jaotunud normaaljaotusega

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kus keskväertus $\mu = 100$ ja standardhälve $\sigma = 15$. Leida (arvuti abiga), mitmel % elanikkonnast on IQ vahemikus 85 kuni 115. Mitmel % elanikkonnast on IQ suurem kui 140?

Valitud vastused

12.1. a) $\frac{\pi^2}{2}$, b) $\frac{\pi}{2}$, c) $\frac{8}{3}\pi$.

12.4. $\frac{9}{5}\pi$.

12.7. $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$.

12.8. $S = 2\pi r(b - a)$.

12.10. a) $-\infty$, c) $4/3$, d) $3/2$.

12.11. $P(x > 3) = \frac{1}{6}$.

12.12. $S = 4$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{8}{5}, \frac{16}{7})$.