

13.1 Arvread

Geomeetriline rida,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Koondub, kui $|q| < 1$ ja hajub muul juhul.

Üldine harmooniline rida,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Koondub, kui $\alpha > 1$ ja hajub muul juhul.

Hajumise tunnus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0.$$

Positiivsete ridade võrdluslause,

$$0 \leq u_n \leq v_n \Rightarrow \sum u_n \leftrightarrow \sum v_n.$$

Positiivsete ridade integraaltunnus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \sim \int_a^{\infty} u(x) dx.$$

Ülesanne 13.1

Näidake järgmiste ridade hajumist:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} 1,$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n,$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{3n-1},$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right)^n,$
 (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n)^{-1/n},$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3},$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}},$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$

Ülesanne 13.2

Millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n},$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1},$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n},$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(-4)^{n+1}},$
 (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}},$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}},$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{-0.9}},$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}.$

Ülesanne 13.3

Pall kukub 2 meetri kõrguselt ja põrkab igal põrgatusel $\frac{2}{5}$ kõrgusele tagasi (võrreldes oma viimase kõrgusega). Leida palli poolt läbitud vertikaalne vahemaa.



www.clipartof.com · 22049

Ülesanne 13.4

Esitada lõpmatu perioodiline kümnendmurd 7.(36) hariliku murruna.

Ülesanne 13.5

Millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad (positiivsete ridade võrdluslause),

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)4^n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}, \quad (g) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^3, \quad (h) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{5^n}\right).$$

Ülesanne 13.6

Uurida järgmiste ridade koonduvust integraalse tunnuse abil,

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n}, \quad (d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}, \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n^2+1)}.$$

Ülesanne 13.7

✂ Tudeng sai kontrolltöös 1 punkti 10-st (10%). Iga järeltöö makimaalset punktide arvu suurendatakse 10 võrra. Tudengi eelmise töö saadud punktid kantakse üle protsentides tehtava töö maksimaalsest võimalikust. Kui tudeng saab igas töös 1 punkti juurde, siis mitu järeltööd läheb vaja, et tudeng saaks lõpuks kokku 50% järeltöö punktidest? Kas sedasi on võimalik kogusummana ka täispunktid saada?

Selgituseks: II töös on tudengil ees 2 punkti 20-st (10%), ta saab ühe juurde ja kokku $2 + 1 = 3$.

III töös on tudengil ees $\frac{3}{20} \cdot 30 = \frac{9}{2}$ p. 30-st (15%), ta saab ühe juurde ja kokku $\frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}$ jne.

Ülesanne 13.8

✂ Tudeng alustab ühikast teekonda loengusse. Kui ta on läbinud $\frac{3}{4}$ teekonnast, otsustab ta ümber mõelda, keerab otsa ringi ja alustab teekonda tagasi ühika suunas. Läbinud $\frac{3}{4}$ tagasiteest, keerab ta ringi ja liigub nüüd loengusse. Siis jälle keerab otsa ringi ja liigub ühika poole. Kui selline liikumine jätkub (keerates alati $\frac{3}{4}$ läbitud teel otsa ringi ja liikudes vastassuunas), siis millisesse kahte punkti tuleks rajada ööklubi, et tudengi tegevus muutuks mingilgi moel mõttekaks?

Kui ühikas on punktis A ja loeng punktis B ning vahepealne muutuv punkt $P \in (A, B)$, siis $\frac{3}{4}$ tuleb võtta alati kas lõigust $[A, P]$ või $[P, B]$.

Valitud vastused

13.2. a) koondub, c) koondub, e) hajub, g) hajub.

13.4. $\frac{81}{11}$.

13.5. a) koondub, c) hajub, e) hajub, g) koondub.

13.7. Kogutud punktide arv tuleb $\frac{1}{10} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.