14.1 Astmeread

Leibniz'i tunnus,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n, \quad u_n > 0,$$

koondub, kui

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \quad u_n \geq u_{n+1}.$$

D'Alembert'i tunnus,

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|,$$

rida koondub absoluutselt, kui $D < 1$.

Cauchy tunnus,

$$C = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|},$$

rida koondub absoluutselt, kui $C < 1$.

Astmerida

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

koondub, kui

$$x \in (-R, R), \quad \frac{1}{R} = D, \quad \frac{1}{R} = C.$$

Ülesanne 14.1

Uurida Leibniz'i tunnuse abil järgmiste ridade koondumist:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n)}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+3}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-0.99)^n$, (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{10}\right)^n$, (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{\ln(n^2)}$.

Ülesanne 14.2

Uurida d'Alemberti'i tunnuse abil järgmiste ridade koondumist:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n n}{5^n}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n+1}$, (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(-e)^n}$, (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!}$.

Ülesanne 14.3

Uurida Cauchy tunnuse abil järgmiste ridade koondumist:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}1.5^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{n\sqrt{n}}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$, (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right)^n$, (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n)}$.

Ülesanne 14.4

Leidke järgmiste astmeridade koonduvusraadius R ja koonduvuspiirkond X:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+3}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}5^n(x-1)^n$, (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{n-1}x^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^n}(x-4)^n$, (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(4x+1)^n$, (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}(2x+5)^n$, (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n$, (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)!\,x^n$,

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{2n+1}}{n!}$, (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x-3)^n$, (l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{3}\right)^n$.

Ülesanne 14.5

☠ Arendada järgmised funktsioonid astmeritta:

(a) $f(x)=\frac{1}{1+x}$, (b) $f(x)=\frac{x}{1-x^3}$, (c) $f(x)=\ln(1+x)$,

(d) $F(x)=\int \arctan(x^2)\,dx$.

Ülesanne 14.6

☠ Isegi suured matemaatikud eksivad. Leonhard Euler alustas võrrandist

$$\frac{x}{x-1}+\frac{x}{1-x}=0,$$

kirjutas selle ümber kujule

$$\frac{1}{1-1/x}+\frac{x}{1-x}=0,$$

leidis igale funktsioonile esituse astmerea kaudu ja järeldas, et

$$\cdots+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+\cdots=0.$$

Asendage siia $x=1$ näitamaks, et järeldus ei kehti. Leidke Euleri tuletuskäigus tehtud vead.

Valitud vastused

14.1. a) koondub, c) koondub, e) hajub.

14.2. a) koondub absoluutselt, c) koondub absoluutselt, e) koondub absoluutselt, g) koondub absoluutselt.

14.3. a) hajub, c) koondub tingimisi, e) koondub absoluutselt, g) koondub absoluutselt.

14.4. a) $R=1$, $X=(-1,1]$, $A=(-1,1)$, c) $R=1$, $X=A=(-1,1)$, e) $R=\frac{1}{4}$, $X=A=(-1/2,0)$, g) $R=\frac{1}{2}$, $X=A=(-3,-2)$,

14.4. i) $R=0$, $X=A=\{0\}$, k) $R=0$, $X=A=\{3\}$.

14.5. a) $\frac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $X=(-1,1)$, c) $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $X=(-1,1]$.