

15.1 Fourier' read

2π -perioodiline funktsioon,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$2L$ -perioodiline funktsioon ($\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = 2L$),

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)],$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\omega x) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Teoreem 15.1

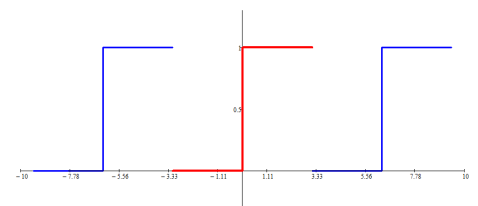
Dirichlet' teoreem. Kui funktsioon f on tükiti sile vahemikus $(-\pi, \pi)$, siis selle funktsiooni Fourier' rida koondub summaks $S = S(x)$, kusjuures

- (a) $S(x) = f(x)$ funktsiooni f pidevuspunktides;
- (b) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$ funktsiooni f katkevuspunktides;
- (c) $S(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)]$;
- (d) $S(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)]$.

Ülesanne 15.1

Leida 2π -perioodilise ruutlainekese f Fourier' rida ja uurida selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x \leq 0 \\ 1 & , 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

**Ülesanne 15.2**

Astmeridade korral võisime tuletise võtta rea üksikutest liikmetest eraldi. Osutub, et Fourier' ridade korral see enam alati läbi ei lähe. Veenduge, et

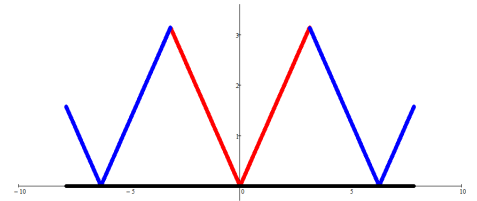
$$2x = 4 \sin(x) - \frac{4}{2} \sin(2x) + \frac{4}{3} \sin(3x) - \frac{4}{4} \sin(4x) + \dots, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Võtke mõlemast poolest tuletis x -järgi ja veenduge, et punktis $x = 0$ saadud võrdus ei kehti.



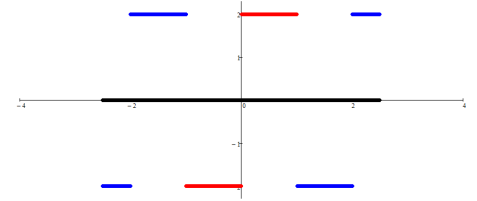
Ülesanne 15.3

Leida 2π -perioodilise kolmnurkse lainekese $f(x) = |x|$ Fourier' rida ja uurida selle koonduvust, $x \in [-\pi, \pi]$.

**Ülesanne 15.4**

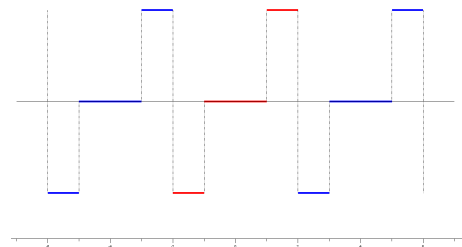
Leida 2-perioodilise lainekese f Fourier' rida ja uurida selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} -2 & , -1 < x \leq 0 \\ 2 & , 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

**Ülesanne 15.5**

Leida 4-perioodilise lainekese f Fourier' rida ja uurida selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -2 < x < -1 \\ 0 & , -1 < x < 1 \\ 1 & , 1 < x < 2 \end{cases}.$$

**Ülesanne 15.6**

Leida 2-perioodilise lainekese $f(x) = x^2$ Fourier' rida ja uurida selle koonduvust, $x \in [-1, 1]$.

Kasutades argumenti väärtust $x = 1$, näidake, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Valitud vastused

15.1. $F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x).$

15.3. $F(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi} \cos((2n-1)x).$

15.4. $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\pi x).$

15.5. $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi)) \sin(n\pi x/2).$

15.6. $F(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x).$

