

2.1 Kompleksarvu trigonomeetriline kuju, eksponentkuju. Rakendused

De Moivre'i valem:

$$z^n = r^n [\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Kompleksarvu juured:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right],$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Eksponentkuju:

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}.$$

Euler'i valem:

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi).$$

Üldistatud Ohm'i seadus:

$$U = I \cdot Z$$

 U on pinge, I on voolutugevus, Z on impedants.**Ülesanne 2.1**

Arvutada

- (a) $(3 + \sqrt{3}i)^5$, (b) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$, (c) z^{273} , $z = \cos\frac{2\pi}{9} + i \sin\frac{2\pi}{9}$,
 (d) $(\sqrt{3} - i)^{-12}$, (e) $[3 \cdot \cos(50^\circ)]^8$, (f) $\frac{[3 \cdot (\cos(115^\circ) + i \sin(115^\circ))]^2}{2 \cdot (\cos(80^\circ) + i \sin(80^\circ))}$.

Ülesanne 2.2

Kirjutada eksponentkujul,

- (a) 3, (b) -1, (c) -i, (d) $-1 - i$, (e) $2(\cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3})$, (f) $1 - \sqrt{3}i$.

Ülesanne 2.3Kirjutada algebralisel kujul $a + bi$,

- (a) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, (b) $64e^{i0}$, (c) e^{-i} , (d) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$, (e) $e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}$, (f) $\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$.

Ülesanne 2.4

Kujutada komplekstasandil järgmised avaldised:

- (a) $4e^{-i\pi/6}$, (b) $|z| = 3$, (c) $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 3$, (d) $|z - 1| = 1$, (e) $\Re(z^2) = 4$.

Ülesanne 2.5Leida arvu -1 seitsmenda juure $\sqrt[7]{-1}$ kõik väärtused.**Ülesanne 2.6**Leida $\sqrt[5]{z}$, kui $z = 32(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})$ ja kujutada tulemus komplekstasandil.**Ülesanne 2.7**

Lahendada järgmised võrrandid:

- (a) $z^4 = -4i$, (b) $x^2 - 6x + 10 = 0$, (c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 28 = 0$,
 (d) $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$, (e) $x^6 - 2x^3 + 5 = 0$, (f) $(x+1)^8 = 256(x-1)^8$.

Ülesanne 2.8Millise reaalsete kordajatega ruutvõrrandi lahenditeks on kompleksarvud $z_1 = 2 + i$ ja $z_2 = 2 - i$?

Ülesanne 2.9

Kasutades eksponentkuju, tuletada trigonomeetrilised valemid $\cos(\alpha \pm \beta)$ ja $\sin(\alpha \pm \beta)$ kohta.

Ülesanne 2.10

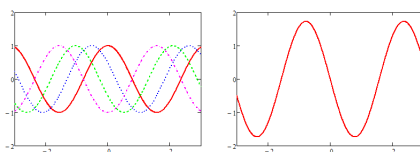
☒ Näidata, et kehtib võrdus (vihje: kasutada koosinuse alternatiivset esitust e astmete kaudu)

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{8} (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3).$$

Ülesanne 2.11

☒ Olgu antud sama sagedusega 4 erinevat ühikamplituudiga koosinuslainet, mis erinevad igast eelmisest sama faasi $\frac{\pi}{3}$ võrra. Nende liitumise tulemuseks on üks koosinuslaine $f(t) = A \cdot \cos(2t + \varphi)$. Leida amplituudi A ja faasinihke φ avaldised ehk lihtsustada funktsioon

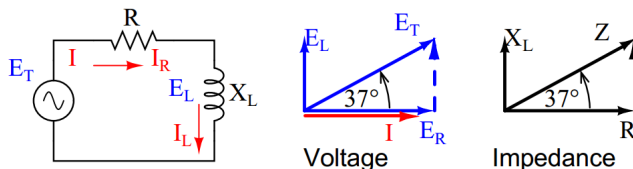
$$f(t) = \cos(2t) + \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2t + 2\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2t + 3\frac{\pi}{3}\right).$$



Vihje: kasutades reaalosa $Re(f(z))$, on võimalik opereerida Euler'i valemiga ja kompleksarvudega.

Ülesanne 2.12

☒ Vahelduvvoolu ahelas on järjestikku antud takisti R (40 oomi) ja induktioonipool L (79.58 millihenrit). Vooluallika pinge on 10 volti ja sagedus ω on 60 hertsi. Leida vooluvõrgu impedantsid Z , Z_R , Z_L , kogu vooluvõrgu näivtakistus $|Z|$, aktiivtakistus $Re(Z)$ ja reaktiivtakistus $Im(Z)$. Lisaks, pinged U_L ja U_R ning voolutugevused $I = I_R = I_L$. Määrata kõikidel juhtudel ka voolu faas. Vihje: pooli impedantsi Z_L faas on 90 kraadi ja selle moodul avaldub valemiga $|X_L| = 2\pi\omega L$.



Ülesanne 2.13

☒ Vahelduvvoolu ahelas on järjestikku antud takisti $R = 45 \Omega$, kondensaator mahtuvusega $C = 86.2 \mu F$ ja induktioonipool ($L = 42.9 mH$). Vooluallika pinge U on 225 millivolti ja sagedus $\omega = 60 Hz$. Leida vooluahela võimsus $P = U \cdot I \cdot \cos \theta$, kus I on ahela voolutugevus ja θ on faas U ja I vahel. Vihje: pooli ja kondensaatori impedantsid on $X_L = i2\pi\omega L$ ja $X_C = -\frac{i}{2\pi\omega C}$.

Valitud vastused

2.1. a) $-432 + 144\sqrt{3}i$, d) $\frac{1}{4096}$, f) $4.5 e^{i(5/6)\pi}$.

2.2. b) $e^{i\pi}$, f) $2e^{-i\pi/3}$.

2.3. b) $64 + 0i$, d) $1 + \sqrt{3}i$, f) $-2 + 0i$.

2.5. Näiteks $z_2 = e^{i(5/7)\pi}$.

2.6. Näiteks $z_0 = 2e^{i(1/15)\pi}$.

2.7. c) $x \in \left\{4, -\frac{1}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$ e) $x \in \left\{\sqrt[6]{5} \cdot e^{\pm i\frac{\varphi+2k\pi}{3}} \mid k = 0, 1, 2; \varphi = \arctan 2 \approx 63.4^\circ\right\}$.

2.12. Kogupinge $10 V \angle 0^\circ$, voolutugevus $1/5 A \angle -36.9^\circ$, impedants $50 \Omega \angle 36.9^\circ$, $I = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$.

2.13. $P = 1.02 mW$.