

## 3.1 Piirväärtus ja selle arvutamine

**Piirväärtuse**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  **definiitsioon.** Arvu  $L$  nimetatakse funktsiooni  $f$  piirväärtuseks protsessis  $x \rightarrow a$ , kui iga positiivse arvu  $\varepsilon > 0$  jaoks leidub selline positiivne arv  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , et iga  $x$  korral, mis rahuldab tingimust

$$0 < |x - a| < \delta,$$

kehtib võrratus  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Määramatused:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

Teisendusvalemid:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

NB! Kõikides teoreemides peavad leiduma lõplikud piirväärtused!

**Teoreem 5.2.** Kui  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  ja funktsioon  $y = f(x)$  on tõkestatud punkti  $a$  mingis ümbruses, siis  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ .

**Teoreem 5.3.**  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ,  $B \neq 0$ .

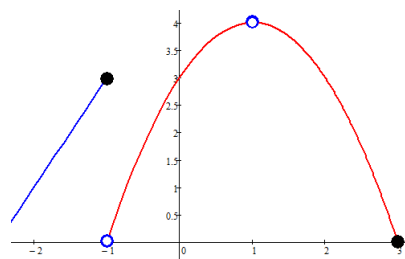
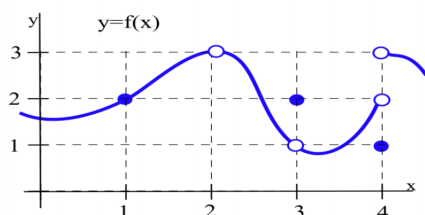
**Teoreem 5.5. Võileiva omadus.** Kui punkti  $a$  mingis ümbruses kehtivad võrratused  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  ja  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ , siis leidub ka piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ .

**Teoreem 5.6.** Kui  $f$  on elementaarfunktsioon ja  $a$  kuulub tema määramispiirkonda, siis  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

## Ülesanne 3.1

Kirjutada joonise põhjal järgmised väärtused:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \quad f(-1), \\ & \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad f(1). \end{aligned}$$



Täidetud ring tähistab, et funktsioonil on selles punktis väärtus ja seest tühi ring, et ei ole väärtust.

## Ülesanne 3.2

☠ Tõestada piirväärtuse definiitsiooni abil järgmised piirväärtused:

$$\text{(a) } \lim_{x \rightarrow 3} (4x - 7) = 5, \quad \text{(b) } \lim_{x \rightarrow -3} x^2 = 9, \quad \text{(c) } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \text{(d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

## Ülesanne 3.3

Leidke järgmised piirväärtused:

$$\text{(a) } \lim_{x \rightarrow 25} (\sqrt{x} - 5), \quad \text{(b) } \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 7}, \quad \text{(c) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x}, \quad \text{(d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 4x}{x}.$$

**Ülesanne 3.4**

Leidke järgmised piirväärtused:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4+x}{2+e^{\frac{-1}{\sin x}}}$ ,  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right)$ , (e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(2x) e^{-x})$ , (f)  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right)$ .

**Ülesanne 3.5**

Leidke järgmised piirväärtused:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)^2 - 1}{2x-2}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^3 - 1}$ ,  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{3 - x}$ , (e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{(2x^2 - 8)x^2}$ , (f)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ,  
 (g)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+2}{(x+4)^2}$ , (h)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{x-4}$ , (i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ .

**Ülesanne 3.6**

Leidke järgmised piirväärtused:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$ , (c)  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{y+16}}{y}$ ,  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ , (e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x})$ , (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 - \frac{2}{x} - 1 \right)$ .

**Ülesanne 3.7**

Leidke järgmised piirväärtused:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-4}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4}{x^2 - x + 1}$ ,  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ , (e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log(x) - \log(2x))$ , (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^2}{(4x + 3)^2}$ .

**Ülesanne 3.8**Punktmassi liikumist aja  $t$  järgi kirjeldab seos  $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5t$ . Leida punktmassi liikumise kiirus hetkel  $t = 2$ ehk leida piirväärtus  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta t) - f(2)}{\Delta t}$ .**Ülesanne 3.9**

Teatud inimese silma pupilli pindala avaldub seosega  $S = \frac{36+24y^3}{1+4y^3} (mm)^2$ , kus  $y$  on valguse heledus luumenites. Milliste väärtuste vahel võib pindala teoreetiliselt muutuda?

**Ülesanne 3.10**Analüüsida vesiniku aatomi 3s-orbiidi lainefunktsiooni radiaalse osa  $R_{3s}(r)$  väärtusi

$$R_{3s}(r) = N \cdot \left( 27 - \frac{18}{a_0} r + \frac{2}{a_0^2} r^2 \right) \cdot e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

protsessis  $r \rightarrow 0^+$  ja  $r \rightarrow \infty$ . Siin  $N$  ja  $a_0$  on konstandid,  $r$  on elektroni kaugus tuumast.

**Valitud vastused**3.3. a) 0, c)  $-1/\pi$ .

3.4. a) ei leidu, c) 2, e) 0.

3.5. a) 2, c) 0, e)  $3/8$ , g)  $-\infty$ , i)  $-1/3$ .3.6. a)  $1/2$ , c)  $-1/8$ , e)  $1/2$ .3.7. a) 3, c) 2, e)  $-\log 2$ .