4.1 Tähtsad piirväärtused. Funktsiooni pidevus

Teoreem 6.1. Kui eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused $f(a+)$ ja $f(a-)$, siis nn. ühepoolne piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ eksisteerib parajasti siis, kui $f(a+) = f(a-) = L$.

Definitsioon. Funktsiooni f nimetatakse pidevaks punktis a, kui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} = 1.$$

Ekvivalentsed lõpmata väikesed suurused:

$$\alpha(x) \sim \beta(x),\ x\to a \ \text{ kui, } \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Ülesanne 4.1

Einstein'i erirelatiivsusteooria järgi on keha mass leitav valemiga $M(v) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, kus c on valguse kiirus, $m > 0$ on keha seisumassi ja v on keha liikumise kiirus. Arvutada

$$M(0), \quad M\left(\frac{c}{2}\right), \quad \lim_{v\to c-} M(v), \quad \lim_{v\to c+} M(v),$$

ning mõelda, milline võiks vastavate tulemuste korral olla füüsikaline sisu.

Ülesanne 4.2

Selgitada, miks ei kehti võrdus $\lim\limits_{x\to 0+} 2^{1/x} \overbrace{=}^{?} \lim\limits_{x\to 0-} 2^{1/x}$.

Ülesanne 4.3

Leida järgmised piirväärtused:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{2x^2}$,
(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{x}$,
(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin(x)}{3x}$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cot(x))$,
(e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$,
(f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}$,
(g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)\tan(5x)}{(x-x^3)^2}$,
(h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin(3x)}{3x}$,
(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$,
(j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)}$,
(k) $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin(x))$,
(l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{2\tan^2(x)+3\tan(x)+7}{\tan^2(x)-6\tan(x)+30}$.

Ülesanne 4.4

Leida järgmised piirväärtused:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{3n}}\right)$,
(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(n)}{3n}+\sqrt[n]{5}\right)$,
(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{3/x}$,
(e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{3x-2}$,
(f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+\ln(2)}$.

Ülesanne 4.5

Kui $a \neq 0$ on mingi reaalarv, siis kehtib $a^0 = 1$. Samas, iga naturaalarvu $n > 0$ korral kehtib $0^n = 0$. Nendest esimene reegel soovitaks justkui $x^x \to 1$ (kui $x \to 0+$) ja teine reegel soovitaks, et $x^x \to 0$. Tegelikult on tehe 0^0 määramata, sellel ei ole kindlat väärtust. Mõnikord teatud teoreetilistes valdkondades tehte 0^0 väärtus lihtsalt defineeritakse (nii, nagu parasjagu vaja), et oleks teooriat kompaktsem kirja panna. Milline võiks aga olla tehte 0^0 „loomulik“ väärtus? Idee selle uurmiseks oleks näiteks arvuti abil arvutada x^x väärtusi piisavalt väikeste $x > 0$ jaoks (võib ka teha joonise). Piirväärtuse $\lim_{x\to 0+} x^x$ leiame aga praktikumis, kus tutvume l'Hospital'i reegliga.

Ülesanne 4.6

☠ Leidke järgmised piirväärtused:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}\right]$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan(x^2)\cos 2x}{(x^2-3)}$, (c) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-x^2}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\tan(x)}{x\,\frac{1}{\cos(x)}}$.

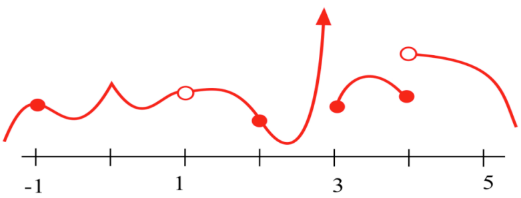
Ülesanne 4.7

☠ Tõestada piirväärtuse definitsiooni abil, et funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas,

(a) $f(x) = 7x$, (b) $f(x) = x^2 + 19$, (c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$, (d) $f(x) = \cos(x)$.

Ülesanne 4.8

Leia joonisel piirkonnad, kus funktsioon on pidev ja punktid, kus ta on katkev.



Ülesanne 4.9

Skitseerida sellise funktsiooni $y = f(x)$ graafik, mis on katkev punktis $x = 3$, millel on olemas piirväärtus 3 piirprotsessis $x \to 3$ ja millel on punktis $x = 3$ väärtus $f(3) = 2$.

Ülesanne 4.10

Uurida funktsiooni f pidevust tema määramispiirkonnas, kui

(a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-x}$, (b) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$, (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2}{x-1} & , x \neq 1, \\ 1 & , x = 1, \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^3 & , x < 2, \\ 6 & , x = 2, \\ 4x & , x > 2, \end{cases}$ (e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 6x}{2x} & , x \neq 0, \\ 3 & , x = 0, \end{cases}$ (f) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & , x \neq 0, \\ e^2 & , x = 0. \end{cases}$

Valitud vastused

4.1. a) $M(0) = m$.
4.3. a) $1/2$, c) $2/3$, e) $1/2$, g) 10, i) 1, k) ei leidu.
4.4. a) 2, c) $1/e$, e) e^9.
4.6. a) $2/\pi$, c) ei leidu.

4.10. a) katkev punktides $x = 0$ ja $x = 1$, c) pidev kõikjal, e) pidev kõikjal.