

5.1 Funktsiooni tuletis

Definitsioon,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Puutuja võrrand,

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Tehted,

$$\begin{aligned}(u \pm v)' &= u' \pm v', \\ (u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v', \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad v(x) \neq 0.\end{aligned}$$

Liitfunktsiooni tuletis,

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Pöördfunktsioonide $y = f(x)$ ja $x = g(y)$ tuletis

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

Ülesanne 5.1

Lähtudes tuletise definitsioonist, leidke järgmiste funktsioonide tuletised:

$$(a) f(x) = 7x - 8, \quad (b) f(x) = 2x^2 - 5, \quad (c) f(x) = \sqrt{3x}, \quad (d) f(x) = \frac{1}{x}.$$

Ülesanne 5.2Leidke järgmiste avaldiste tuletised sõltumatu muutuja x järgi (kõik teised muutujad on konstandid):

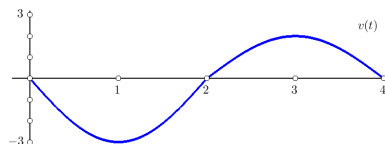
$$\begin{aligned}(a) y &= 5x^3 - 3\pi^2, & (b) y &= 3x^2 + 4ex, & (c) y &= x^5 - \frac{2}{x}, & (d) y &= 2\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x^4}, \\ (e) y &= -3\sqrt{x^3}(5x^2 + 2), & (f) y &= \frac{3}{x^2 - 1}, & (g) y &= \frac{5x}{x - 4}, & (h) y &= \frac{2x^2 - x - 1}{x^2(x + 2)}, \\ (i) y &= x^a b^x, & (j) y &= \ln x + e^x, & (k) y &= \frac{\log_{10}(x)}{\ln(x)}, & (l) y &= \frac{\sin x}{e^x}, \\ (m) y &= \frac{\cos x}{x}, & (n) y &= \tan x + \frac{1}{\sin(x)}, & (o) y &= a^2 \arctan x, & (p) y &= \arccos(x) \arcsin(x).\end{aligned}$$

Ülesanne 5.3Leidke järgmiste avaldiste tuletised sõltumatu muutuja x järgi (kõik teised muutujad on konstandid):

$$\begin{aligned}(a) y &= (4x - 3)^5 + (-3x)^2, & (b) y &= 3x^{-3} + \sqrt{3x - 1}, & (c) y &= 5(3x^6 - 4)^{2/3}, \\ (d) y &= \frac{3}{\sqrt[3]{8x}} + 4\sqrt[3]{\pi^2}, & (e) y &= x\sqrt{1 - x^2}, & (f) y &= \left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^2, \\ (g) y &= \sqrt{\frac{2x+1}{4x+1}}, & (h) y &= \ln(4x - 3)^3, & (i) y &= \ln(x + \ln(x)), \\ (j) y &= 6e^{\sqrt{x}} + 4^{6x}, & (k) y &= \frac{e^{0.5x}}{2x}, & (l) y &= e^{2x - \sin(7x)}, \\ (m) y &= \cos(3x) - \sin^2(x), & (n) y &= \cos(-9x + 2) + \sin^3(4x^5), & (o) y &= \frac{1}{\cos(-7x)} + \frac{1}{\sin(-7x)}, \\ (p) y &= \frac{\cos^2(3x)}{1 + 2\sin^2(2x)}, & (q) y &= \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right), & (r) y &= \ln(\tan(2x)) + \ln(\cot(2x)), \\ (s) y &= 6 \arcsin \sqrt{2 - x}, & (t) y &= \arctan \frac{1-x}{1+x}, & (u) y &= \arccos(x) \ln(\arctan(x)).\end{aligned}$$

Ülesanne 5.4Näidata, et funktsioon $y = e^{-t} \sin(t)$ on diferentsiaalvõrrandi $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ lahend.**Ülesanne 5.5**

Joonisel on toodud osakese kiiruse $v = v(t)$ graafik. Millal on joonise järgi osakese kiirendus null? Millal on osakese kiirus kõige suurem ja millal kõige väiksem?

**Ülesanne 5.6**

Laine kiirus sügavas vees on arvutatav seaduse $v = k \cdot \sqrt{\frac{L}{m} + \frac{a}{L}}$ alusel, k ja a on konstandid, L on laine pikkus. Leida L väärtused, mille korral laine kiirendus $v'(L)$ on null.

Ülesanne 5.7

Keha võngub vedru otsas vertikaalselt seaduse $d = 2.5 \cos(16t)$ (sentimeetrit) alusel, kus t on aeg sekundites. Leida keha kiirus ja kiirendus hetkel $t = 1.5$ s.

Ülesanne 5.8

Mäe pinna vertikaalne ristlõige on kujuga $y = 0.3x - 0.00001x^3$, kus y on mäe kõrgus ja $x \in [0, 100 \cdot \sqrt{3}]$ (meetrites). Milline on mäe kõrgus antud ristlõike koha peal?

Ülesanne 5.9

Millises punktis on joone $y = 2x^2 - 16x$ puutuja paralleelne x -teljega?

Ülesanne 5.10

Näidata, et jooned $y^2 = 4x + 4$ ja $y^2 = 4 - 4x$ lõikuvad täisnurga all.

Ülesanne 5.11

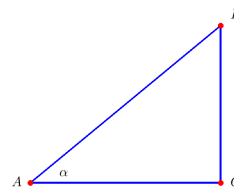
Videomängus liiguvad lennukid vasakult paremale seaduse $y = 2 + \frac{1}{x}$ alusel, tulistades rakette mööda puutujasirget. Kas punktist $A(1, 3)$ tulistatud rakett tabab x -teljele asetatud sihtmärke, kui $x = 1, 3, 4, 5$?

Ülesanne 5.12

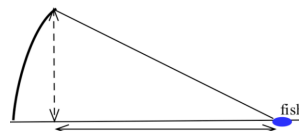
Naftatankeris tekib ringikujuline leke, kus vee pinnal olev õliringi raadius r suureneb kiirusega 10 m minutis. Kui kiiresti suureneb reostatud ala (ringi pindala), kui $r = 25$ m?

Ülesanne 5.13

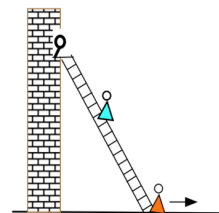
Jalgpall liigub ühtlaselt punktist C mööda vertikaaltelge maapinna lähedalt kiirusega $17 \frac{m}{s}$. TV kaamera asub punktis A , löögikohast 28 m kaugusel. Arvutada vajalik kaamera pööramise kiirus $\alpha'(t)$, et filmida sujuvalt palli hetkel, kui pöördenurk $\alpha = 15^\circ$ või $\alpha = 30^\circ$.

**Ülesanne 5.14**

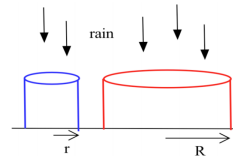
Kalamees püüab säinast, kes haukab liblikat, mis on 20 m pikkuse tamiili otsas (ridva ots on 3 m veepinnast). Kui kalamees kerib tamiili kiirusega $10 \frac{m}{min}$ nii, et säinast veetakse vee pinnal, siis kui kiiresti liigub säinas?

**Ülesanne 5.15**

☠ Prints on ilusa nõiä poolt vangistatud torni. Teda tuleb päästma vapper printsess, kes asetab 7 m pikkuse redeli torni najale. Just siis, kui noorpaar on aknast väljumas, eksib „juhuslikult“ sündmuspaika nõiä, kes hakkab redeli alumist otsa tornist ühtlaselt eemale tirima. Kui kiiresti langeb redeli ülemine ots koos noorpaariga, kui redeli alumine ots oli algselt tornist 5 m kaugusel?

**Ülesanne 5.16**

☠ Vertikaalselt sadavate piiskade korral on püstisesse silindrisse kogutud vee hulk (V) proportsionaalne silindri ava suurusega (S). Kumba klaasi, kas kitsasse või laia, kogutakse vett kiiremini? Millises klaasis tõuseb veetase kiiremini?

**Ülesanne 5.17**

☠ Leidke järgmiste funktsioonide f tuletised, kasutades nende pöördfunktsioone f^{-1} :

- (a) $f(x) = \arcsin x$, (b) $f(x) = \arccos x$, (c) $f(x) = \arctan x$, (d) $f(x) = \operatorname{arsh} x$.

Valitud vastused

5.2. b) $6x + 4e$, d) $\frac{1}{\sqrt{x}} + 8\sqrt[3]{x}$, f) $-\frac{6x}{(x^2-1)^2}$, h) $-\frac{2x^3+2x^2+5x+4}{x^3(x+2)^2}$, j) $\frac{1}{x} + e^x$, l) $\frac{\cos(x)-\sin(x)}{e^x}$, n) $\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

5.3. b) $-9x^{-4} + \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$, d) $-\frac{1}{2}x^{-4/3}$, f) $-14\frac{2x+1}{(3x-2)^3}$, h) $\frac{12}{4x-3}$, j) $\frac{3e\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 6\ln(4)4^{6x}$, m) $-3\sin(3x) - 2\sin(2x)$.

5.6. $L = \sqrt{a \cdot m}$, kusjuures $-\sqrt{a \cdot m}$ ei sobi, kui väärtused peavad olema reaalsed.

5.7. $d' = 36.2 \frac{cm}{s}$ ja $d'' = -271.5 \frac{cm}{s^2}$.

5.9. $x = 4$.

5.12. $500\pi \frac{m^2}{min}$.

5.14. $|v_{sainas}| \approx 10.11 \frac{m}{min}$.