

6.1 Funktsiooni diferentsiaali ja tuletise rakendused

Diferentsiaal,

$$dy = f'(x) \cdot dx, \quad d^2y = d(dy) = f''(x) \cdot dx^2.$$

$$\Delta y \approx dy, \quad \text{kui } \Delta x \text{ on piisavalt väike.}$$

Logaritmiline diferentseerimine,

$$y = [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln |y| = \ln |f(x)|^{g(x)},$$

$$y' = y \cdot (g(x) \cdot \ln |f(x)|)'$$

Ülesanne 6.1

Leidke järgmiste funktsioonide diferentsiaalid:

(a) $y = x^5 + 4x,$

(b) $y = x e^x,$

(c) $R = \sqrt{\frac{6u}{1+2u}},$

(d) $y = (x^2 + 1)^2, x = 1,$

(e) $f(x) = x \sqrt{1 + 4x}, x = 12, \Delta x = 0.06,$

(f) $f(x) = \tan x, x = \frac{\pi}{3}, \Delta x = \frac{\pi}{180}.$

Ülesanne 6.2Leidke järgmiste parameetrisel kujul antud funktsioonide tuletised $y'(x)$:

(a) $x = 3t, y = 1 - t,$

(b) $x = \frac{5t}{2t+1}, y = 0.1(t^2 + t),$

(c) $x = (4t + 3)^2, y = \frac{6}{\sqrt{4t+3}},$

(d) $x = \sqrt{1 + 2t}, y = t - t^2.$

Ülesanne 6.3

☞ Suusahüppetrampliin modelleeritakse selliselt, et hüpperada on trajektooriga $x = 3.5t^2$ ja $y = 20 + 0.12t^4 - 3\sqrt{t^4 + 1}$ meetrit, kus $0 \leq t \leq 4$ (sekundites). Leidke suusahüppaja kiirus $|v(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}$ hetkel $t = 4$ s. Millises punktis x on suusataja trajektoiril kõige järsem langus?

Ülesanne 6.4Leidke järgmiste ilmutamata kujul antud funktsioonide tuletised $y'(x)$ ja $y''(x)$:

(a) $y^5 = x^2 - 1,$

(b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5,$

(c) $\ln(y) + 3x - 7 = 0,$

(d) $3x^3y^2 - 2y^3 = -4,$

(e) $e^y + \sin(y) = x^2 - 3,$

(f) $\cos(xy) - x^7 = \arctan(y^2).$

Ülesanne 6.5

RLC vooluahelas arvutatakse nurksagedus valemi $\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{L^2}$ alusel. Kui R ja C on konstandid, siis milline on hetknurkkiirus $\omega'(L)$ induktsiooni L järgi?

Ülesanne 6.6Näidata, et joone $x^2 + xy + y^2 = 7$ puutujad lõikepunktides x -teljega on paralleelsed.**Ülesanne 6.7**

Arvutada, kui palju ligikaudu suureneb kera pindala, kui raadiust pikendada 50 cm-lt 51 cm-ni.

Ülesanne 6.8

Näidata, et DVD raadiuse mõõtmisel tehtav 2% viga põhjustab u. 4% suurema materjalikulu.

Ülesanne 6.9

Kerakujulisse õhupalli pumbatakse õhku fikseeritud kiirusega $20 \text{ cm}^3/\text{min}$. Kui kiiresti suureneb kera raadius r , kui enne õhu juurde pumpamist $r = 6 \text{ cm}$?

Ülesanne 6.10

Õisel tänaval kõnnib 1.8 meetri pikkune tegelinski, kelle selja taha jääb 7 meetri kõrgune valgust andev tänavalatern. Tegelinski eemaldub laternast kiirusega 3 m/sek . Kui kiiresti pikeneb tegelinski ette jääv valgustusest tekkiv vari?

Ülesanne 6.11

Majakas asub sirgest rannajoonest 4 km kaugusel. Majaka tuli pöörleb ringiratast ja teeb ühe täistiiru iga 10 sekundi järel. Kui kiiresti liigub valguskiir mööda sirget rannajoont hetkel, kui kiir moodustab rannajoonega 45 kraadise nurga?

Ülesanne 6.12

Vertikaalselt õhku lastud raketti jälgitakse teleskoobiga, mille mõõtetäpsus on 2 kraadi. Vaateplatvorm asub 3000 m kaugusel raketi stardiplatvormist. Raketi asukoht mõõdetakse 2 sekundit pärast starti ja tulemuseks saadakse 64-kraadine nurk. Kui kõrgel on rakett ja milline on võimalik viga kõrguse hindamisel?

Ülesanne 6.13

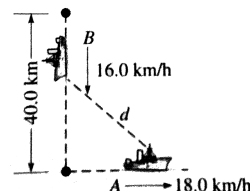
Ristkülikukujulise tala tugevus on võrdeline tala laiuse w ja kõrguse ruudu d^2 korrutisega. Leida maksimaalse tugevusega tala mõõtmed, mida saab löigata 40 cm läbimõõduga ümarpalgist.

Ülesanne 6.14

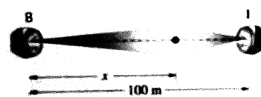
Lennukompanii lubab pardale käsipagasi, mille laiuse, kõrguse ja pikkuse summa ei ületa 1.2 meetrit. Kui koti laiuse ja pikkuse suhe on 2.5, siis mis mõõdus peaks olema kott, et tema ruumala oleks suurim.

Ülesanne 6.15

Punktist B liigub I laev lõunasse kiirusega 16 km/h ja punktist A liigub teine laev itta kiirusega 18 km/h . Kui punktid A ja B asuvad ühel ja samal vertikaalil teineteisest 40 km kaugusel, siis millisel ajahetkel t on laevad teineteisele kõige lähemal? Leida ka laevade vaheline vähim vahemaa.

**Ülesanne 6.16**

Valgusallika valgustihedus mingis punktis võrdub valgusallika tugevusega jagatud kauguse (valgusallikast) ruuduga. Kui 8 ja 1 valgustugevuse ühikuga valgusallikad asuvad üksteisest 100 m kaugusel, siis millises punktis nende vahel on valgustihedus kõige väiksem?

**Ülesanne 6.17**

☞ Leidke järgmiste funktsioonide tuletised:

(a) $y = \frac{x \cdot \cos(x) \cdot \sqrt{x+1}}{x^2+1}$, (b) $y = x^{\cos(x)}$, (c) $y = [\cos(3x)]^{2x}$, (d) $y = [\sin(x)]^{e^{-x}}$.

Valitud vastused

6.1. a) $dy = (5x^4 + 4)dx$, c) $dR = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{u}(1+2u)^{3/2}} du$, c) $df(\pi/3) = \frac{\pi}{45}$.

6.2. a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}$, c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{(4t+3)^2}$.

6.4. a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{5y^4}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{10y^5 - 16x^2}{25y^9}$, c) $\frac{dy}{dx} = -3y$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 9y$, e) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^y + \cos(y)}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 - (e^y - \sin(y))(y')^2}{e^y + \cos(y)}$.

6.17. b) $y'(x) = y \cdot \left[-\sin(x) \ln|x| + \frac{\cos(x)}{x} \right]$.