7.1 L'Hospital'i reegel. Taylor'i valem

L'Hospital'i reegel määramatuste $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ korral,

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ kui leidub } \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Taylor'i valem,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \alpha_n(x).$$

Astmeeksponentfunktsioonid,

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}}, \quad f(x) > 0,$$

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim(g(x)\cdot\ln[f(x)])}.$$

Jääkliige Lagrange'i kujul,

$$\alpha_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a, x).$$

Ülesanne 7.1

Leidke l'Hospital'i reegli abil järgmised piirväärtused:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x+1}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+9}{5x^2-x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-6x^3+5}{x^4+5x^3-6}$, (d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^3-1}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, (f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x}$ (g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1}$, (h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$,

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)}$, (j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^{4x}}$, (k) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln(\sin(6x))}{\ln(\sin(3x))}$, (l) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\cdot\ln(x)}{x+\ln(x)}$,

Ülesanne 7.2

Leidke järgmised piirväärtused:

(a) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1-\cos(x)}{(\pi-x)^2}$, (b) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{2\sin(x)}{1-\cos(x)}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 \cdot \ln(x)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin(x)\cdot\ln(x)$, (e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin(x)$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(2x)}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$, (h) $\lim\limits_{x\to\pi/2-} (1-\sin(x))\cdot\tan(x)$, (i) $\lim\limits_{x\to 1+} (1-x)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Ülesanne 7.3

Leidke järgmised piirväärtused:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$, (b) $\lim\limits_{x\to 1-} (1-x)^{3-3x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} (\cot x)^{\sin x}$, (f) $\lim\limits_{x\to 1-} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$, (g) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$, (h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ülesanne 7.4

Arvutada Taylor'i valemi ($n = 1$ ja $n = 2$) abil ligikaudu $\sqrt{1.03}$ ja $\sqrt{0.96}$.

Ülesanne 7.5

Kirjutada välja Maclaurin'i valem ($n = 4$) funktsiooni e^{2x} jaoks.

Ülesanne 7.6

Kirjutada välja Taylor'i valem ($n = 3$) funktsiooni $\ln(x)$ jaoks punktis $a = 1$.

Ülesanne 7.7

Kirjutada välja Taylor'i valem ($n = 3$) funktsiooni $\cos x$ jaoks punktis $a = \frac{\pi}{3}$.

Ülesanne 7.8

Hinnake absoluutset viga järgmises Taylor'i valemi kaudu saadud ligikaudses valemis:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Ülesanne 7.9

Kui $\cos(x)$ asendada ligikaudse valemiga $1 - \frac{x^2}{2}$, kas siis väärtuste $|x| < 1$ jaoks on tehtav arvutusviga vastuvõetav või mitte? Põhjendada oma vastust.

Ülesanne 7.10

Arvutada e väärtus 6 komakoha täpsusega. 1748. aastal arvutas Leonhard Euler ilma arvuti abita 23 komakohta, 1884. aastal arvutas J. Marcus Boorman 346 komakohta.

Ülesanne 7.11

Maapinnast x kilomeetri kõrgusel asuva keha kaal $w(x)$ arvutatakse valemiga

$$w(x) = \frac{m \cdot g \cdot R^2}{(R + x)^2},$$

kus m on keha mass, R on Maa raadius ja g on raskuskiirendus. Näidake, et väikeste kõrguste x korral kehtib

$$w(x) \approx m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{2x}{R}\right).$$

Kui suur peab olema x, et keha kaal väheneks 10%? Maa raadius on ekvaatoril u. $21\,km$ suurem kui poolustel. Kumb mõjutab kaalu rohkem, kas laiuskraadi või kõrguse muutus $21\,km$ võrra?

Ülesanne 7.12

Tudeng avastab, et valem

$$\ln x = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots$$

laseb tal kavalalt raha kokku hoida nutitelefoni Teadusarvutuse lisarakenduselt ja otsustab, et funktsiooni $\ln x$ arvutamiseks piisab kasutada ligikaudset valemit

$$\ln x \approx x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2},$$

mis tema arvates on täpne kuni kolm komakohta. Kontrollida oletuse paikapidavust.

Ülesanne 7.13

☠ Funktsioonide $\cos x$ ja e^x Taylori valemite abil leidke piirväärtus $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Valitud vastused

7.1. a) ∞, c) $-\frac{14}{19}$, e) 0, g) $\frac{1}{2}$, i) 2, k) 1.

7.2. a) ∞, c) 0, e) ei leidu, g) 0, i) $\frac{2}{\pi}$.

7.3. a) 1, c) 1, e) 1, g) e^2.

7.7. $\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\cos(\xi)}{24}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4$, $\xi \in (x, \pi/3)$.

7.8. Kõige lihtsam on hinnata kui $|\alpha_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{4!} \leq \frac{1}{384} \approx 0.0026$. Saab ka hinnata kui $|\alpha_3(x)| \leq \frac{|x|^5}{4!} \leq \frac{1}{768} \approx 0.0013$.

7.13. $-\frac{1}{12}$.