8.1 Algfunktsioon ja määramata integraal

Def. Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f algfunktsiooniks vahemikus (a, b), kui $F'(x) = f(x)$ iga $x \in (a, b)$ korral.

Def. Funktsiooni f kõikide algfunktsioonide üldavaldist $F(x) + C$ nimetatakse funktsiooni f määramata integraaliks. Tähistame $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Muutuja vahetus $x = u(t)$,

$$\int f(x)\,dx = \int f(u(t)) \cdot u'(t)\,dt.$$

Ülesanne 8.1

Leida järgmiste funktsioonide algfunktsioonid:

(a) $6t^3 + 12$, (b) $12x^5 + 6x$, (c) $4\sqrt{x} + 3$, (d) $\frac{5}{2}x^{3/2}$, (e) $3(R^2+1)^2(2R)$.

Ülesanne 8.2

Lihtsustada järgmised avaldised:

(a) $\left(\int \arctan(x)\,dx\right)'$, (b) $\frac{d}{dx}\int e^{x^3-1}\,dx$, (c) $d\left(\int \cos(x)\,dx\right)$.

Ülesanne 8.3

Leidke vahetult järgmised määramata integraalid:

(a) $5\int dx$, (b) $\int (3x + x^2)\,dx$, (c) $\int \left((\sqrt{x})^3 + x^{-5}\right)\,dx$,

(d) $\int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)\,dx$, (e) $\int 5x\sqrt{x}\,dx$, (f) $\int \left(x^{1/3} + x^{1/5} + x^{-1/7}\right)\,dx$,

(g) $\int (2^t e^t + \ln 2)\,dt$, (h) $\int (\cos y - 3\sin y)\,dy$, (i) $\int \tan^2 z\,dz$.

Ülesanne 8.4

Demonstreerimaks, et vaakumis langevad kõik kehad konstantse kiirendusega, lasi Apollo 15 astronaut David Scott Kuu peal maha kukkuda haamril ja sulel, mis asusid 1.2 meetri kõrgusel Kuu pinnast. Teleülekandest võib näha, et haamer ja sulg langevad Kuu peal aeglasemalt kui Maa peal. Mitu sekundit kulus sulel ja haamril pinnani jõudmiseks?

Vihjeks. Tähistame kõrguse muutumist ajas funktsiooniga $h(t)$. Sel juhul peab kiirendus $h''(t)$ võrduma Kuu gravitatsioonilise konstandiga $1.6\,m/s^2$. Lisades ka algtingimused, tuleb lahendada võrrand

$$h''(t) = -1.6, \quad h(0) = 1.2, \quad h'(0) = 0.$$

Ülesanne 8.5

Leidke muutuja vahetamise või diferentsiaali märgi alla viimise võttega määramata integraalid:

(a) $\int (3y+5)^4\,dy$, (b) $\int \frac{dt}{t+2}$, (c) $\int \cos(4x)\,dx$, (d) $\int \sqrt{8x+1}\,dx$,

(e) $\int 2x(x^2-1)^5\,dx$, (f) $\int \frac{4x dx}{\sqrt{6x^2+1}}$, (g) $\int \cos(x)\sin^3(x)\,dx$, (h) $\int \frac{\ln(x-5)}{x-5}\,dx$,

(i) $\int \frac{8dx}{(0.3+2x)^3}$ (j) $\int \sqrt[3]{5-8s}\,ds$, (k) $\int \frac{dz}{4z^2+9}$, (l) $\int e^{-3x+2}\,dx$,

(m) $\int e^x \sin(e^x)\,dx$, (n) $\int \frac{t^2}{t^3+3}\,dt$, (o) $\int \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}\arcsin s}$, (p) $\int \tan^3 x\,dx$.

Ülesanne 8.6

Leidke määramata integraalid märgitud muutuja vahetusega:

(a) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$, $x = t-1$; (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$, $x = \sin^2 t$; (c) $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$, $t = e^x+1$.

Ülesanne 8.7

☠ Leidke määramata integraalid, kasutades selleks sobivat muutuja vahetust:

(a) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, (b) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$, (c) $\int \frac{\ln\tan z}{\sin z\cos z}\,dz$, (d) $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+a^2}}$, $a \in \mathbb{R}$.

Ülesanne 8.8

Ameerika Illinoisi Mootorratturite Turvalisuse Ühingul on nõue, et 50 km/h sõitev mootorratas peab suutma pidurdada u. 14 meetri jooksul. Millist konstantset aeglustust (negatiivne kiirendus) see reegel nõuab ja palju pidurdamine aega võtab?

Ülesanne 8.9

Esitati kord selline üsna veider küsimus: „Kumb tundub teile „turvalisem“, kas sõita autoga vastu seina kiirusel 90 km/h või kukkuda seisva autoga alla 9. korruse hoone katuselt?“ Teisiti, milline on kukkuva auto kiirus maapinnani jõudes?

Ülesanne 8.10

☠ Olgu $y(t)$ teatud bakterite arv ajamomendil t. Malthuse (inglise majandusteadlane 1766-1834) seadus ütleb, et liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on võrdeline isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = k\,y,$$

kus k on võrdetegur. Sõltuvalt keskkonnast, näiteks toiduainete kättesaadavusest, on k positiivne (keskkond soodustab paljunemist). Kui näiteks toitu on vähe, siis k on negatiivne. Leida bakterite arvu $y(t)$ üldavaldis, kui ajahetkel $t=0$ on meil u. 10^7 bakterit.

Valitud vastused

8.3. a) $5x+C$, c) $\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{4}x^{-4} + C$, e) $2x^{5/2}+C$, g) $\frac{2^t e^t}{\ln 2+1} + t\ln 2 + C$, i) $\tan(z) - z + C$.

8.5. a) $\frac{(3y+5)^5}{15} + C$, c) $\frac{\sin(4x)}{4} + C$, e) $\frac{(x^2-1)^6}{6} + C$, g) $\frac{\sin^4(x)}{4} + C$.

8.5. i) $\frac{-4}{(0.3+2x)^2} + C$, k) $\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2}{3}z\right) + C$, m) $-\cos(e^x) + C$, o) $\ln(\arcsin(s)) + C$.

8.7. a) asendus $x = \sin(t)$, $I = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + C$, b) $I = \sqrt{x^2-1} - \arctan\sqrt{x^2-1} + C$.

8.7. c) asendus $x = \ln(\tan(z))$, $I = \frac{\ln^2(\tan(z))}{2} + C$, d) asendus $t = |a|\tan(x)$, $I = -\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{|t|} + C$.

8.10. $y = 10^7 e^{k\,t}$.