

9.1 Määramata integraal. Ositi integreerimine ja muud võtted

Ositi integreerimine,

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Trigonomeetrilised valemid,

$$2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x), \quad 2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x).$$

Standardne muutuja vahetus,

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt,$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ülesanne 9.1

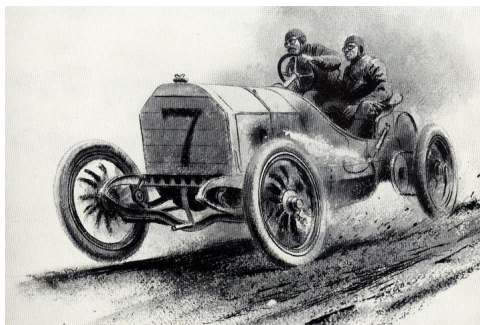
Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise teel,

- (a) $\int x \sin(x) dx$, (b) $\int x e^{-x} dx$, (c) $\int x \sqrt{1-x} dx$, (d) $\int x \ln(x) dx$,
 (e) $\int \ln(z) dz$, (f) $\int t \tan^2(t) dt$, (g) $\int s^3 \sin(s) ds$, (h) $\int \arcsin(x) dx$.

Ülesanne 9.2

Leidke järgmised integraalid kahekordse ositi integreerimise teel,

- (a) $\int \cos^2(x) dx$, (b) $\int e^x \sin(x) dx$, (c) $\int \cos(\ln(x)) dx$, (d) $\int \operatorname{ch}(s) \sin(s) ds$.

Ülesanne 9.3

Arvutianalüüs näitab, et testimiseks kasutatava auto kiirus (m/s) avaldub valemiga

$$v = \frac{t^3}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Leida auto liikumise seadus $s = s(t)$ ja auto poolt läbitud teepikkus esimese 8 sekundi jooksul.

Ülesanne 9.4

☠ Leidke järgmised integraalid,

- (a) $\int \arctan(x) dx$, (b) $\int e^{\sin(x)} \sin(2x) dx$, (c) $\int z \cos^2(z) dz$, (d) $\int \sin(\sqrt{t}) dt$.

Ülesanne 9.5

Lennuki tiiva all voolava õhu tõstevõime arvutamisel tuleb leida integraali

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta^2 \cos(\theta) d\theta$$

väärtus. Leidke see.

Ülesanne 9.6

Tehes muutujavahetuse $t = \tan \frac{x}{2}$, leidke integraal

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx.$$

Ülesanne 9.7

Leidke integraalid järgmistest ratsionaalsetest polünoomidest,

$$(a) \int \frac{(2x+1)dx}{x(x+3)}, \quad (b) \int \frac{dx}{x^2(x+7)}, \quad (c) \int \frac{(x+2)^2 dx}{x(x-1)^2}, \quad (d) \int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

Ratsionaalsete polünoomide integreerimiseks kasutatakse järgmisi teisendusi:

$$\frac{ax+b}{(x+c) \cdot (x+d)} = \frac{A}{x+c} + \frac{B}{x+d},$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x+d) \cdot (x+e)^2} = \frac{A}{x+d} + \frac{B}{x+e} + \frac{C}{(x+e)^2},$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x+d)(x^2+|e|)} = \frac{A}{x+d} + \frac{Bx+C}{x^2+|e|}.$$

Ülesanne 9.8

Tehes muutujavahetuse $x+1 = \tan(t)$, leidke integraal

$$\int \frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x+2}} dx.$$

Ülesanne 9.9

☠ Mitmete liikide populatsiooni looduses saab modelleerida logistilise diferentsiaalvõrrandiga. Vaatleme olukorda, kus metskitsede arv looduspargis ajas t aastat on tähistatud kui $y = y(t)$ isendit. Mõõtmised on näidanud, et kitsede arvukus muutub kiirusega

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{2000}\right), \quad 100 \leq y \leq 2000.$$



Alghetkel $t = 0$ toodi loodusparki 100 kitse. Esimese 5 aastaga kasvas kitsede arv suuruseni 432. Leida lahendi $y = y(t)$ üldavaldis ja toodud info põhjal ka tundmatu parameeter k . Mitu kitse looduspargis ennustab mudel 15. aastaks?

Valitud vastused

9.1. b) $-(x+1)e^{-x} + C$, d) $\frac{x^2(2\ln(x)-1)}{4} + C$, f) $\ln|\cos(t)| + t \tan(t) - \frac{t^2}{2} + C$ h) $x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$.

9.2. b) $\frac{1}{2}e^x(\sin(x) - \cos(x)) + C$, d) $\frac{1}{2} \operatorname{sh}(s) \sin(s) - \frac{1}{2} \operatorname{ch}(s) \cos(s) + C$.

9.4. a) $x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$, b) $2e^{\sin(x)}(\sin(x) - 1) + C$, c) $\frac{z^2}{4} + \frac{1}{4}z \sin(2z) + \frac{1}{8} \cos(2z) + C$, $-2\sqrt{t} \cos(\sqrt{t}) + 2 \sin(\sqrt{t}) + C$.

9.5. $\frac{\pi^2}{2} - 4$.

9.7. b) $\frac{1}{49} \ln \left| \frac{x+7}{x} \right| - \frac{1}{7x} + C$, d) $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$.

9.9. Parameeter $k \approx 0.331$. 15 aastaga tuleb u. $y(15) \approx 1766$ kitse.