1 Vigade edasikandumine arvutustes

Näide. Arvutusvead on ajaloos põhjustanud suuri katastroofe.

http://www.ima.umn.edu/~arnold/455.f96/disasters.html

Patriot raketitõrjesüsteemi sisemine kell mõõdab aega kümnendiksekundites. Arvu 0.1 võib kirjutada kui

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \cdots = \frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2^4}} + \frac{\frac{1}{2^5}}{1-\frac{1}{2^4}},$$

mis arvutis kasutatavas kahendsüsteemis esitub kujul

$$0.0001100110011001100110011001 1\ldots.$$

Hetkel kasutuses olnud 24-bitisesse registrisse salvestati arv

$$0.00011001100110011001100$$

veaga

$$0.0000000000000000000000001100 11\ldots,$$

mis kümnendsüsteemis teeb $9.5 \cdot 10^{-8}$. Õhus oldud 100 tunnise aja arvutamisel tehti viga

$$9.5 \cdot 10^{-8} \cdot 100 \cdot 3600 \cdot 10 = 0.342 \text{ sekundit.}$$

Iraagi rakett liigub kiirusega 1676 m/s läbides 0.342 sekundi jooksul u. 573 meetrit. Laskmistäpsuse viga on üle poole kilomeetri.

Olgu $\tilde{a}$ suuruse a ligikaudne väärtus.

Definitsioon 1.1

Ligikaudse väärtuse $\tilde{a}$ **tõeliseks veaks** nimetatakse suurust $\Delta = a - \tilde{a}$.

Definitsioon 1.2

Ligikaudse arvu $\tilde{a}$ **absoluutseks veaks** nimetatakse positiivset arvu ε, mis rahuldab võrratust

$$|\Delta| = |a - \tilde{a}| \leq \varepsilon. \tag{1.1}$$

Praktikas ei ole tihti arvu a täpne väärtus teada ja järelikult ei ole võimalik leida ka tõelist viga. Küll aga on võimalik seda viga hinnata (leida absoluutne või relatiivne viga). Mida väiksem on ε, seda parem on hinnang. Kuna $\tilde{a} - \varepsilon \leq a \leq \tilde{a} + \varepsilon$, siis kirjutatakse $x = \tilde{a} \pm \varepsilon$.

Definitsioon 1.3

Ligikaudse arvu $\tilde{a}$ **relatiivseks veaks** nimetatakse positiivset arvu δ, mille korral on täidetud võrratus

$$\left|\frac{\Delta}{\tilde{a}}\right| = \left|\frac{a-\tilde{a}}{\tilde{a}}\right| \leq \delta. \tag{1.2}$$

Märkus 1.1

Relatiivseks veaks δ võib võtta $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|\tilde{a}|}$. Liitmisel ja lahutamisel andmete absoluutsed vead liituvad. Korrutamisel ja jagamisel andmete relatiivsed vead liituvad.

Näide. Olgu arv $a = 9.5$ ja temale vastav ligikaudne väärtus $\tilde{a} = 10$. Siis tegelik viga on $\Delta = 9.5 - 10 = -0.5$, absoluutne viga on $|\Delta| = |-0.5| = 0.5$ (sobib ka iga suurem arv, näiteks 0.6, kuid siis oleks hinnang jämedam). Relatiivseks veaks võtame $\delta = \frac{\varepsilon}{|10|} = \frac{0.5}{10} = 0.05$ ehk relatiivne viga on 5 %.

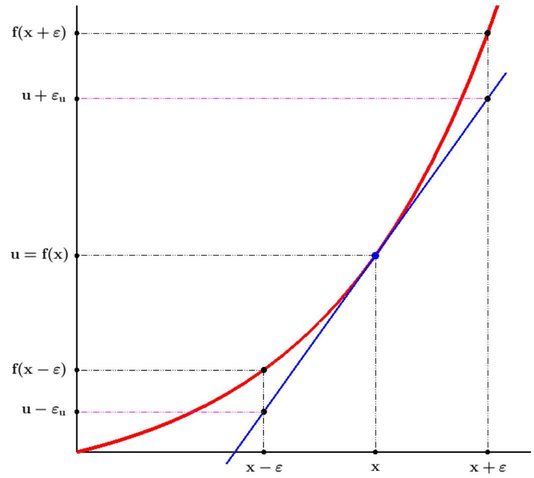
Paneme tähele, et näiteks $a = 95$ ja $\tilde{a} = 100$ korral saaksime $|\Delta| = 5$ ja $\delta = 0.05$. Ühikute teisendamisel absoluutne viga muutub, kuid relatiivne viga mitte. Veelgi enam, $a = 1.5$ ja $\tilde{a} = 2$ korral saaksime $|\Delta| = 0.5$ ja $\delta = \frac{0.5}{2} = 0.25$ ehk 25 %. Sama absoluutse vea korral võib relatiivne viga oluliselt erineda.

Definitsioon 1.4

Kui on teada argumentide $x_1, \ldots, x_n$ väärtused absoluutsete vigadega $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, siis diferentseeruva **funktsiooni f väärtuse** $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ absoluutseks veaks loetakse

$$\varepsilon_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot \varepsilon_i, \qquad (1.3)$$

eeldusel, et absoluutsed vead ε_i on väikesed.



Definitsioon 1.5

Väärtuse $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ relatiivseks veaks loetakse

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln |u|}{\partial x_i} \right| \cdot \varepsilon_i. \qquad (1.4)$$

Näide. Olgu antud funktsioon

$$f(x, y) = x \cdot y^2 + 3x + 1.$$

Siis ligikaudsete väärtuste x ja y korral absoluutste vigadega ε_x ja ε_y saame

$$\varepsilon_u = (y^2 + 3) \cdot \varepsilon_x + 2 \cdot |x \cdot y| \cdot \varepsilon_y.$$

NB! Kõigis arvestuslikes ülesannetes esineb parameeter α, mis on iga tudengi jaoks unikaalne ning mille väärtuse saate teada õppejõult. Arvestuse saamiseks tuleb esitada ülesande lahendus, selgitada programmikoodi ning vastata tekkinud küsimustele.

Ülesanne 1.9

Mõnikord on kahe lähedase arvu jagamisel võimalik tulemust päästa, kui avaldist targalt teisendada. Veenduge, et lõpmatus aritmeetikas annavad järgmised kaks avaldist samaväärseid tulemusi:

$$E_1 = \frac{1 - \cos(x)}{\sin^2(x)}, \quad E_2 = \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$

Lõplikus aritmeetikas (nagu 64-bitised ujukomaarvud teie arvutis) see nii ei ole. Võrrelge Mathcad'iga arvutatud E_1 ja E_2 väärtusi $x_i = \frac{1}{10^i}$ $(i = 0, \ldots, 10)$ korral.

Arvestuslik ülesanne 1.10

Tähtaeg: 20. veebruar 2015. Leidke maakera pinnal paikneva kihi ruumala, kui Maa ekvatoriaalraadius on R km ning kihi paksus on d mm. Hinnake tulemuse absoluutset ja relatiivset viga.

Ruumala V sõltub kolmest ligikaudsest suurusest, $V = V(p, d, R)$. Siinjuures võtame p, d ja R täpseks väärtuseks vastavalt π, 20 ja 6378.135 ning lähisväärtuseks võtame vastavalt 3, $2+\alpha$ ja 6378.

Kas tulemus erineks, kui kasutada esimese valemi asemel teist valemit:

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(3R^2 d + 3Rd^2 + d^3\right), \quad V = \frac{4}{3}\pi (R + d)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 \quad ? \qquad (1.5)$$

Kuidas on lood aga siis, kui d ühikuteks on millimeetrite asemel nanomeetrid?